

Sパラ再入門
広島大学 天川修平

内容

▼ イントロ


◦ クイズ	6
◦ Sパラは難しい…	8
◦ 内容, 想定対象者	9
◦ Sパラメータは「波の反射・透過」による回路網の表現	10
◦ S行列と他の回路行列の際立った違い	12
◦ 「基準抵抗」をどう理解したらいい?	14
◦ 表記法	16

▼ 伝送線路とS行列

◦ 伝送線路と波	19
◦ 終端器 (負荷) での波の反射	21
◦ ポートと回路網	23
◦ S行列が持つべき性質を考える (2ポートの場合)	25
◦ S行列の種類	27
◦ 電圧散乱行列	29
◦ 電流散乱行列 (その1)	32
◦ 電流散乱行列 (その2)	35
◦ 基準抵抗で規格化された波の散乱行列	37
◦ 基準インピーダンスで規格化された波の散乱行列	40
◦ 反射係数の絶対値が1を超える?	44
◦ Passive 回路網の透過係数の絶対値が1を超える?	50
◦ 特性インピーダンス vs 基準インピーダンス	52
◦ シグナルフローグラフ	53
◦ 基準インピーダンスの変更 (1)	56
◦ S行列の種類のとめ (一般化S行列を除く)	61
◦ ポートごとに基準インピーダンスが異なる場合	63
◦ T行列とR行列	67
◦ 映像パラメータ (image parameters)	73
◦ 反復パラメータ (iterative parameters)	78

▼ 電流・電圧にもとづく回路網の表現形式

◦ Y行列 (アドミッタンス行列)	81
◦ Z行列 (インピーダンス行列)	84
◦ H行列 (ハイブリッドHパラメータ)	88

◦ G行列 (ハイブリッドGパラメータ)	90
◦ ABCD行列 (F行列)	92
◦ 回路行列が存在する／しない	98
▼ Power wavesと一般化S行列	
◦ 電力波の反射係数	101
◦ 電力波と電圧波・電流波との関係	105
◦ パワーの反射係数 vs 電圧の反射係数	112
◦ 電力波に対する散乱行列 (一般化S行列)	114
◦ 通常のS行列と一般化S行列の比較	116
◦ 共役映像パラメータ	118
◦ 一般化S行列のちょっと変わった性質	120
◦ 一般化S行列の変換式	123
◦ 各種S行列の使い分け	124
▼ 伝送線路	
◦ 伝送線路に関する式のまとめ	127
◦ 伝搬定数 γ の計算式	132
▼ De-embedding	
◦ De-embedding と unterminating	134
◦ De-embeddingの定式化	137
◦ Self-calibration	144
◦ 対称TSD (thru-line, TL)	145
◦ 対称TMS (thru-match, TM)	153
◦ TSD (thru-short-delay)	156
◦ TRL (thru-reflect-line)	163
▼ 付録	
◦ 複素数	172
◦ 一次分数変換	174
◦ 初等複素関数	175
◦ MATLABによる多価複素関数のunwrapping	183
◦ 行列	185
◦ S行列の歴史的なことについて	191
◦ 参考文献	193
▼  先行公開	
◦ 基底の変換と座標変換	199
◦ 電圧・電流の変換とY行列・Z行列の変換	200

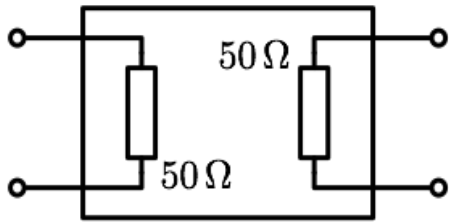
• 2ポートの even/odd (偶奇) 変換	202
• 対称2ポートの even/odd 変換と二等分定理	204
• 差動アンプの unilateralization	207

イントロ

•クイズ	6
•Sパラは難しい…	8
•内容, 想定対象者	9
•Sパラメータは「波の反射・透過」による回路網の表現	10
•S行列と他の回路行列の際立った違い	12
•「基準抵抗」をどう理解したらいい?	14
•表記法	16

クイズ

▼1. この2ポートのS行列は？



- (a) $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- (b) $S = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$
- (c) $S = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$

▼▼

• S行列は基準抵抗 R_{ref} の選び方に依存する

$$S_{ii} = \frac{Z - R_{\text{ref}}}{Z + R_{\text{ref}}}$$

- (a) $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $R_{\text{ref}} = 50 \Omega$ の場合
- (b) $S = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $R_{\text{ref}} = 25 \Omega$ の場合
- (c) $S = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$ $R_{\text{ref}} = 100 \Omega$ の場合

▼2. 2ポートのS行列のもっとも近しい親戚といえるのはどれ？

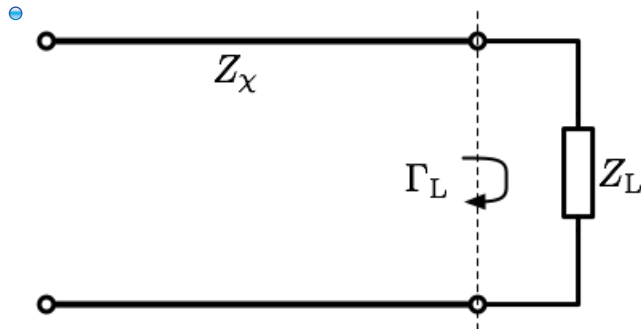
- a. ABCD行列 (F行列)
- b. H行列 (ハイブリッドHパラメータ)
- c. 映像パラメータ (image parameters)
- d. Y行列 (アドミッタンス行列)

▼▼

- 映像インピーダンスを対角に並べた $Z_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} Z_{i1} & 0 \\ 0 & Z_{i2} \end{bmatrix}$ を
基準インピーダンス行列とすると、S行列は $S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\theta_{i12}} \\ e^{-\theta_{i21}} & 0 \end{bmatrix}$.
という簡単な形で書ける. $\theta_{i21}, \theta_{i12}$ は映像伝送量.

▼3. (○×クイズ)

- 特性インピーダンスが Z_x の伝送線路が、受動素子で終端されている. この終端部分での反射係数の絶対値は1を超えることもある



- 複素基準インピーダンスを使って反射係数を定義すると、反射係数の絶対値が1を超える場合もある

Sパラは難しい…

▽Sパラはなんだかよくわからん

- $$S_{ji} = \frac{b_j}{a_i} \Big|_{a_{j(\neq i)}=0} \quad (\text{S 行列の } ji \text{ 成分})$$
- a_i と b_j が電流でも電圧でもない (?) からイメージしづらい
- a_i や b_j じゃなく電圧で定義した S 行列もあるようだが…?
- Sパラの定義には、伝送線路の「特性インピーダンス」とか「基準インピーダンス」とかが出てくる。なんで?
- 「特性インピーダンス」とか「基準インピーダンス」とか言ってるくせに、インピーダンスが純抵抗の場合のことしか説明してない文献が多いけど、それでいいの? 現実の伝送線路はロスがあるから、特性インピーダンスは複素数なんだが…
- などなど

▽Sパラについて学ぶためのリソースが限られてる

- 詳しく (わかりやすく!) 解説してる本とかがあまりない

▽Sパラがわかりにくい理由のいくつか

- Sパラにはいくつかの種類 (定義) がある
- 元来、媒質を伝搬する波にもとづく表現形式だが、そうでない場合 (大きさを持たない、ただの集中定数交流回路) にもそのまま流用する場合がある
- 「波」から「電流・電圧」の情報を取り出す時に「基準インピーダンス」が介在する
- 波の媒質 (伝送線路) に損失がある場合の扱いがややこしい
- Sパラは複素数だから計算にも気を使う。特に多価複素関数の扱いが難しい

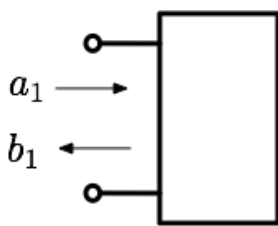
内容, 想定対象者

- Sパラを軸に（しかしそれに限定せず）RF関係の基礎事項・わかりにくいところを説明する
- ▽ 主に回路理論的側面について話す
 - 電磁気学との対応にはあまり深く立ち入らない（難しいので）
- ◎ ▽ Sパラ再入門
 - RFについて一応勉強したことのある人が対象
 - 仕事で使ってるが、実はよく理解できてないかも…という人の一助に

Sパラメータは「波の反射・透過」による回路網の表現

- ▽ S行列 (scattering matrix, 散乱行列) は, 元来, 「入射した波の反射と透過」をもとにした回路網の記述のしかた
 - 「ネットワークを取り囲む媒質中にどのような反射波・透過波が生じるか」によってネットワークを記述する表現法
 - Sパラメータ (scattering parameters, 散乱パラメータ) は, S行列の行列要素
- ▽ それに対して, Y行列 (アドミッタンス行列) やZ行列 (インピーダンス行列) ではネットワークそのものだけに注目しており, まわりに媒質があるとかないとかも考えてない
 - したがって「空間的な広がりを持った波」のイメージは必要ない
- しかし, Y行列やZ行列と同様に「空間的な広がりを持った波」とは関係の薄い系にSパラを流用することも可能

▽ 1ポートのSパラ



▽ a_1 は入射する進行波の振幅, b_1 は出ていく進行波の振幅

▽ 振幅ではなく, 実効値 (root-mean-square value) とする流儀もある. その場合, パワーの計算時に係数に気をつけければいい

- $a_{1,\text{rms}} = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ ← 単一周波数の正弦波を考えてるから $\frac{1}{\sqrt{2}}$ を掛ければいい.

$$b_{1,\text{rms}} = \frac{b_1}{\sqrt{2}}$$

- 比をとると係数は消えるので, いずれの場合でもS行列は同じになる

- $$S_{11} = \Gamma = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_{1,\text{rms}}}{a_{1,\text{rms}}}$$

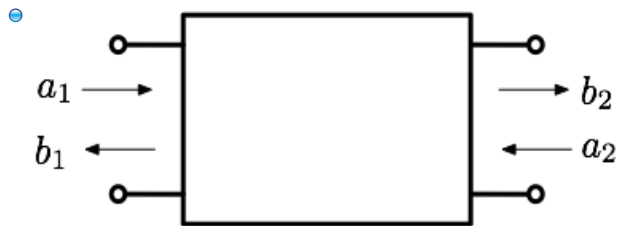
$$\nabla b_1 = S_{11}a_1 = \Gamma a_1$$

- 1ポートのSパラは反射係数そのもの

▼ただしこの反射係数は複素数で、振幅の大きさの比と位相回転を表す

- 絶対値 $|S_{11}|$ が振幅の大きさの比
- 偏角 $\arg S_{11}$ が位相回転

▼2ポートのS行列



$$\nabla \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

▼対角要素は反射係数

- 1つのポートに接続された線路内での前進波振幅（位相込み）と後退波振幅（同）との比

▼非対角要素は透過係数

- ちがうポートに接続された線路を伝搬する進行波振幅同士の比（出る波／入る波）

▼多ポートのS行列

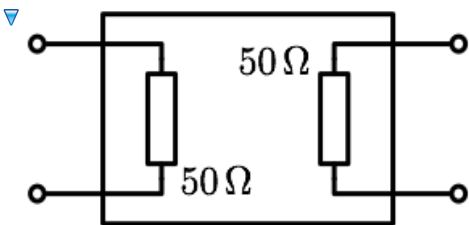
$$\nabla \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

S行列と他の回路行列の際立った違い

▼ 「S行列」 だけでは回路の完全な記述になっていない

- 「S行列」と「基準抵抗 (or 基準インピーダンス)」とがペアになって初めて回路の完全な記述になる
- それに対して、Y行列とかZ行列とかでは「行列」だけで完全な記述になっている
- ここでいう「完全な記述」とは、ある周波数 ω での、あるバイアス条件下での小信号応答がわかるということ

▼ この2-portの回路行列は？



- $Z = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \Omega$

- $Y = \begin{bmatrix} 1/50 & 0 \\ 0 & 1/50 \end{bmatrix} S$

- ▼ $S_{(R_{\text{ref}})} = \frac{50 - R_{\text{ref}}}{50 + R_{\text{ref}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とか $S = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ とかいった行列だけ

与えられても、情報不足でインピーダンスやアドミッタンスを決められない。

- $S_{(50 \Omega)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $R_{\text{ref}} = 50 \Omega$ の場合

- $S_{(25 \Omega)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $R_{\text{ref}} = 25 \Omega$ の場合

- $S_{(100 \Omega)} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$ $R_{\text{ref}} = 100 \Omega$ の場合

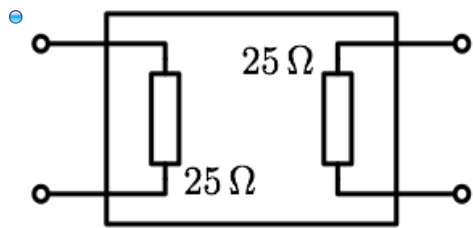
▼ R_{ref} の値が与えられて初めてZ行列やY行列への変換が可能になる

- Y行列への変換式

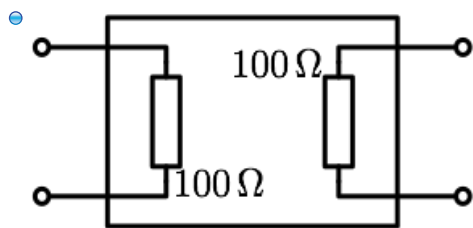
◎ Z行列への変換式

▼ ほかの例

▼ $S_{(25\Omega)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ なら？



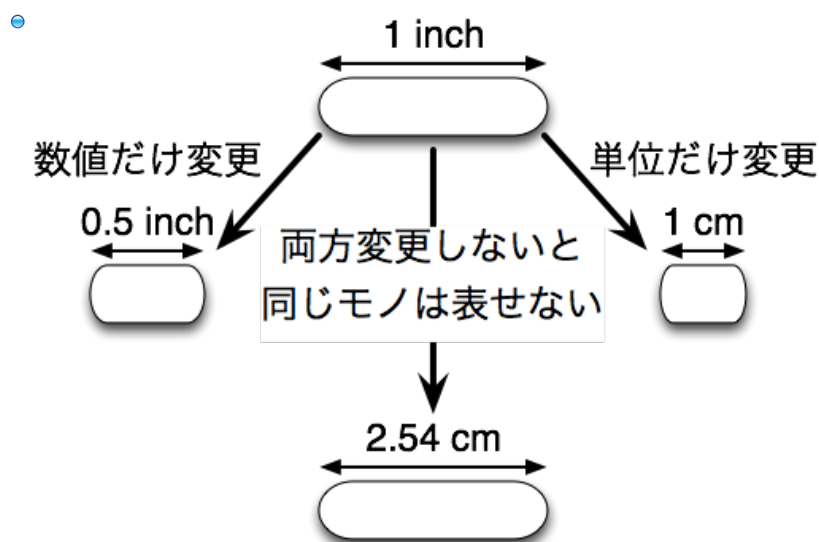
▼ $S_{(50\Omega)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ なら？



「基準抵抗」をどう理解したらいい？

▼基準抵抗は「単位」みたいなもの

▼同じモノでも、cm単位のものさしで測るのと、inch単位のものさしで測るのとでは、長さの数値が変わる



- 単位を指定せずに数値だけ言っても、物理的な長さはわからない

▼「基準抵抗」が通常の「単位」と違うところ

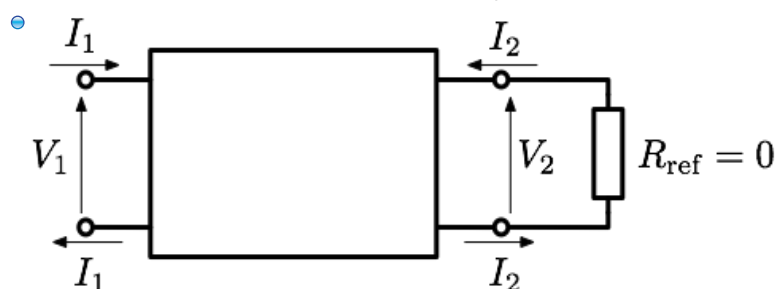
- 単位はただの比例関係だが、基準抵抗は数学的には「一次分数変換」の中に入ってくるので、ずっと複雑

▼実は、Y行列やZ行列にも「基準抵抗／基準コンダクタンス」があると思ってもいい

▼Yパラメータは $R_{\text{ref}}=0$ で終端して求める

- $$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{Z_2=R_{\text{ref}}=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{Z_2=R_{\text{ref}}=0}$$

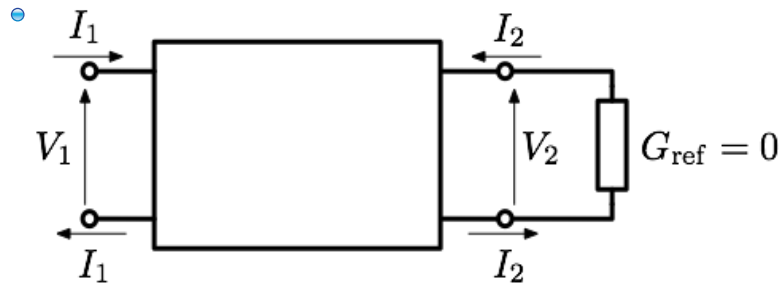


- Y行列では基準抵抗 R_{ref} の値が0と決まっているから、わざわざ明示する必要がない

▽ Zパラメータは $G_{\text{ref}}=0$ で終端して求める

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{Y_2=G_{\text{ref}}=0}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{Y_2=G_{\text{ref}}=0}$$

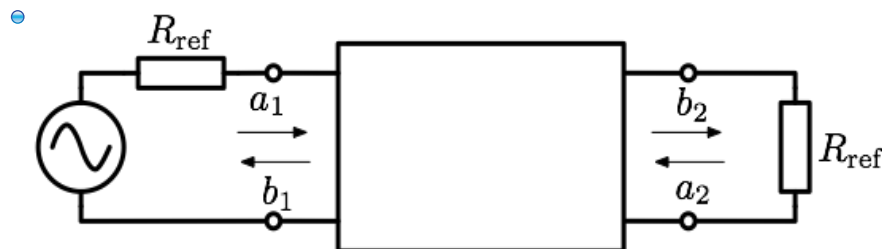


- Z行列では基準コンダクタンス G_{ref} の値が0と決まっているから、わざわざ明示する必要がない

▽ Sパラメータは R_{ref} で終端して求める

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{Z_2=R_{\text{ref}}}$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{Z_2=R_{\text{ref}}}$$



▽ S行列では基準抵抗 R_{ref} が有限値だから、明示する必要あり

- だから $S_{(R_{\text{ref}})}$ とか $S_{(Z_{\text{ref}})}$ とか書くことにする

- 明示してない場合は、 $R_{\text{ref}}=50\Omega$ (正の実数固定値) の場合と $Z_{\text{ref}}=Z_x$ (媒質の特性インピーダンス) の場合とが考えられる

- 以上のように考えると、S行列以外の回路行列も R_{ref} または G_{ref} とともに定義されているものと統一的に理解できる

- ◎ 「 R_{ref} or G_{ref} が0になる／ならない」は「Z行列・Y行列が存在する／しない」とも関係している

表記法

▼数式

内容	例
自然対数の底 虚数単位	e j
実数, 複素数 縦ベクトル 行列	0, 1, Z_χ \mathbf{a}_1 Z_{ref}
単位行列 ($n \times n$) 零行列 ($n \times n$)	$\mathbf{1}, \mathbf{1}_n$ $\mathbf{0}, \mathbf{0}_n$
z の複素共役 A の転置 A の転置共役 A と B の Kronecker 積	z^* A^T A^\dagger $A \otimes B$
z の実部 z の虚部 z の偏角 常用対数 自然対数 自然対数の主値 指数関数 指数関数の略記法 A の行列式 A のトレース	$\Re(z)$ $\Im(z)$ $\arg z$ $\log z$ $\ln z$ $\text{Ln } z$ $\exp z$ e^z $\det A$ $\text{tr } A$

▼Sパラメータ, S行列

- $S_{ji(50\Omega)}$: 50Ω の基準抵抗で規格化された S パラメータ
(ポート i とポート j の基準抵抗が 50Ω)
- $S_{(R_{\text{ref}})}$: 基準抵抗 R_{ref} で規格化された S 行列
(すべてのポートの基準抵抗が R_{ref})
- $S_{(R_{\text{ref}1}, R_{\text{ref}2})}$: 基準抵抗 $R_{\text{ref}1}, R_{\text{ref}2}$ で規格化された 2 ポートの S 行列
(ポート 1 の基準抵抗が $R_{\text{ref}1}$, ポート 2 の基準抵抗が $R_{\text{ref}2}$)
- $S_{(Z_{\text{ref}1}, Z_{\text{ref}2})} = S_{(Z_{\text{ref}})}$: 基準インピーダンス行列 $Z_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} Z_{\text{ref}1} & 0 \\ 0 & Z_{\text{ref}2} \end{bmatrix}$
で規格化された 2 ポートの S 行列

▼この表記法はWoodsによる

- ©
 - D. Woods, "Multiport-network analysis by matrix renormalisation employing voltage-wave S-parameters with complex normalisation," Proc. IEE, vol. 123, no. 3, pp. 198–204, 1977.

伝送線路とS行列

◦ 伝送線路と波	19
◦ 終端器（負荷）での波の反射	21
◦ ポートと回路網	23
◦ S行列が持つべき性質を考える（2ポートの場合）	25
◦ S行列の種類	27
◦ 電圧散乱行列	29
◦ 電流散乱行列（その1）	32
◦ 電流散乱行列（その2）	35
◦ 基準抵抗で規格化された波の散乱行列	37
◦ 基準インピーダンスで規格化された波の散乱行列	40
◦ 反射係数の絶対値が1を超える？	44
◦ Passive 回路網の透過係数の絶対値が1を超える？	50
◦ 特性インピーダンス vs 基準インピーダンス	52
◦ シグナルフローグラフ	53
◦ 基準インピーダンスの変更（1）	56
◦ S行列の種類のもつとめ（一般化S行列を除く）	61
◦ ポートごとに基準インピーダンスが異なる場合	63
◦ T行列とR行列	67
◦ 映像パラメータ (image parameters)	73
◦ 反復パラメータ (iterative parameters)	78

伝送線路と波

▽波の媒質としては波の重ね合わせが成り立つ伝送線路を用いるのがふつう

- 一般に、伝送線路の特性インピーダンス Z_x は複素数で、その値は周波数に依存する

▽通常のRLGC表現を使ったら

- $$Z_x(\omega) = \left(\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \right)^{1/2} = R_x(\omega) + jX_x(\omega)$$

ただし $R_x(\omega) > 0$

▽理想的な無損失伝送線路の特性インピーダンス Z_x は実数で、周波数に依存しない

- $$Z_x = \sqrt{\frac{L}{C}} = \Re(Z_x) = R_x \quad \text{特性抵抗 (characteristic resistance)}$$

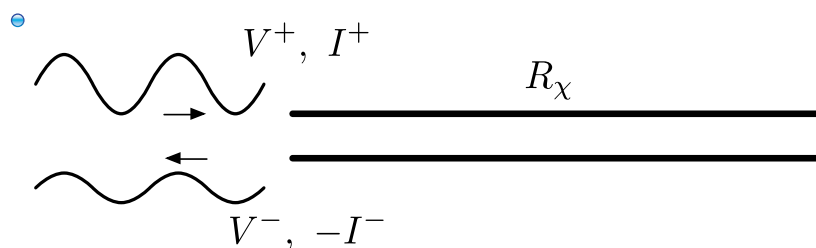
▽有損失伝送線路の特性インピーダンス Z_x は、下記の「無ひずみ条件」を満たさない限り複素数

- $$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (\text{無ひずみ条件})$$

▽特性インピーダンス Z_x とは？

- 波の媒質の属性の1つ

▽一方向に進む進行波の電圧振幅と電流振幅との比が Z_x



- ▶
$$Z_x = \frac{1}{Y_x} = \frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{-I^-}$$

注意：ここでは電流は右向きが正としているので、左向きに流れる I^- にはマイナスが付く。

▽注意： Z_x はすべての進行波成分を重ね合わせた全電圧と全電流との比ではない

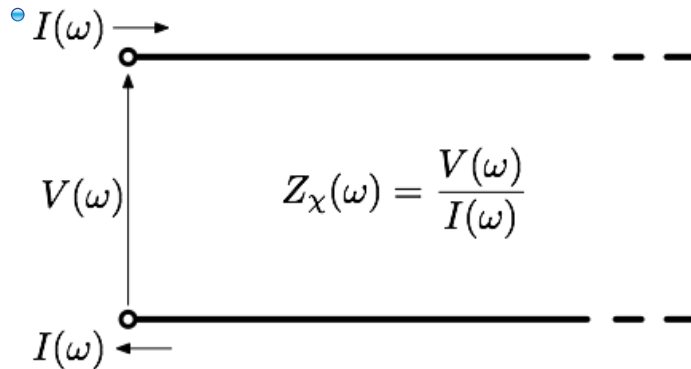
$$\nabla V = V^+ + V^-, I = I^+ + I^-$$

一般には $\frac{V}{I} \neq Z_x$.

$$\bullet V(x) = V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x}$$

$$I(x) = Y_x (V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x})$$

▽半無限長伝送線路をのぞき込んだときのインピーダンスが Z_x



• 入れた波は返ってこない (無限に長いから)

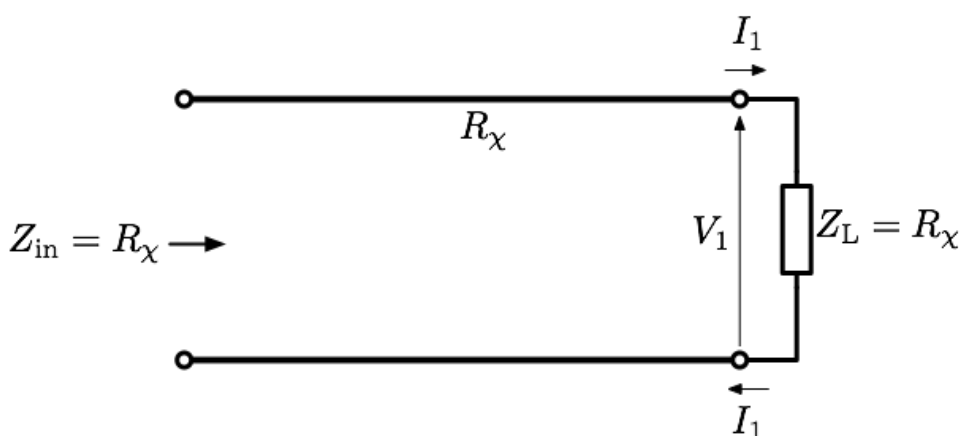
▽無損失なら純抵抗 R_x に見える

$$\bullet Z_x = R_x = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

• 電圧進行波と電流進行波との間に位相差がないことを意味する

• 反射係数やSパラを考える時は、媒質として無損失伝送線路を使うのが基本

▽どこかでちょん切って R_x で終端しても、入力インピーダンスは R_x のまま



• やはり、入れた波は返ってこない。つまり終端部分で波の反射は起こらない

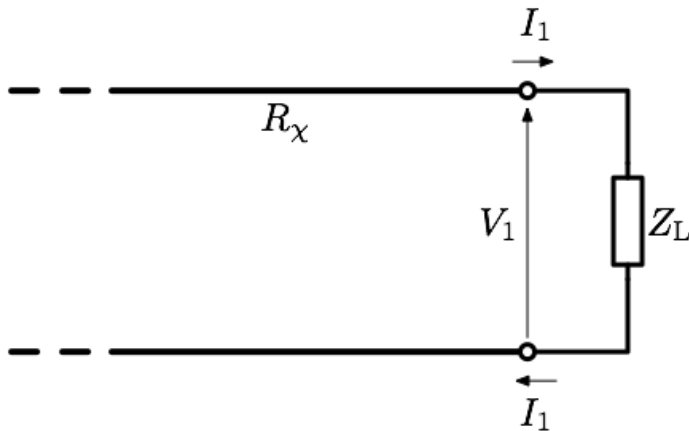
▽終端部分で

$$\bullet Z_L = R_x = \frac{V_1^+}{I_1^+}$$

$$V_1^- = 0, I_1^- = 0$$

終端器（負荷）での波の反射

▼もし終端インピーダンス Z_L が R_x じゃなかったら ($Z_L \neq R_x$) ?



▼伝送線路中の電圧進行波振幅と電流進行波振幅との間の関係は、端部でも維持される

$$R_x = \frac{V_1^+}{I_1^+} = -\frac{V_1^-}{I_1^-}$$

▼終端器での電圧降下 V_1 と流れ込む電流 I_1 との比は Z_L

$$Z_L = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1^+ + V_1^-}{I_1^+ + I_1^-}$$

●結局、全体として矛盾がないように、反射波 (V_1^- , I_1^-) が生じる

$$Z_L = \frac{V_1^+ + V_1^-}{I_1^+ + I_1^-} = \frac{V_1^+}{I_1^+} \cdot \frac{1 + (V_1^-/V_1^+)}{1 + (I_1^-/I_1^+)} = R_x \cdot \frac{1 + S_{V11}}{1 + S_{I11}}$$

$$S_{V11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} \quad (\text{電圧反射係数})$$

$$= S_{11} = \Gamma_L \quad (\text{反射係数})$$

$$S_{I11} = \frac{I_1^-}{I_1^+} \quad (\text{電流反射係数 (その1)})$$

$$= \frac{R_x I_1^-}{R_x I_1^+}$$

$$= -S_{V11}$$

●補足：電流反射係数には違う定義（その2）もある

$$Z_L = R_x \cdot \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} = R_x \cdot \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

▽ 反射係数を Z_L で表すと

$$\Gamma_L = S_{11} = \frac{Z_L - R_{\text{ref}}}{Z_L + R_{\text{ref}}} = \frac{(Z_L/R_{\text{ref}}) - 1}{(Z_L/R_{\text{ref}}) + 1}$$

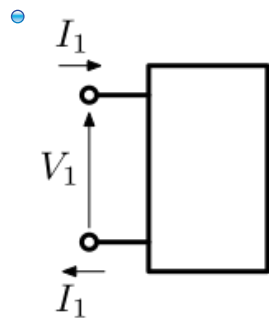
ただし $R_{\text{ref}} = R_\chi$

- 基準抵抗 R_{ref} (reference resistance, normalizing resistance) はインピーダンスから反射係数を算出するときに使う基準値で、媒質の特性抵抗を使う

ポートと回路網

▼ポートとは？

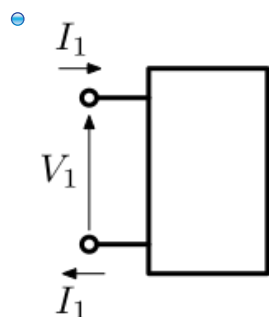
- 「ポート」は端子対の一種
- ▼端子対のうちで入る電流と出る電流とが一致しているものが「ポート」



- この条件を満たさない端子対は単一の「ポート」ではない！

▼1-port

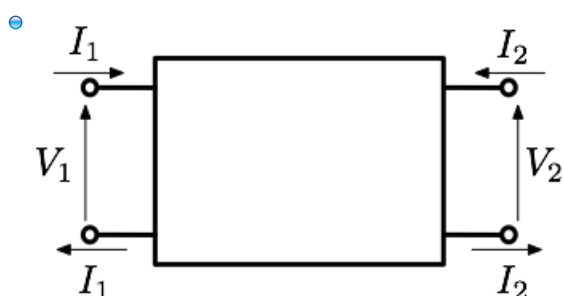
- ▼外部とのインターフェースとして1つのポートを持つ回路網を「1-port」と呼ぶ



- 集中定数2端子素子は 1-port とみなせる

▼2-port

- 外部とのインターフェースとして2つのポートを持つ回路網を「2-port」と呼ぶ

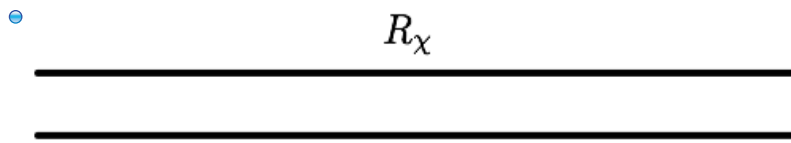


▼ n-port

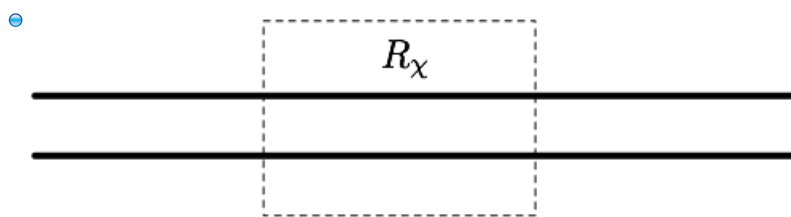
- 外部とのインターフェースとしてn個のポートを持つ回路網を「n-port」と呼ぶ

S行列が持つべき性質を考える (2ポートの場合)

▽特性抵抗が R_x の長い一様な伝送線路を考える



▽一部分 (点線で囲んだ部分) に注目し, 2ポートとみなす



▽明らかに, 点線の部分で波の反射は起きないから, この2ポートのS行列は以下の形になるべき

- ▽
$$S_{(R_x)} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

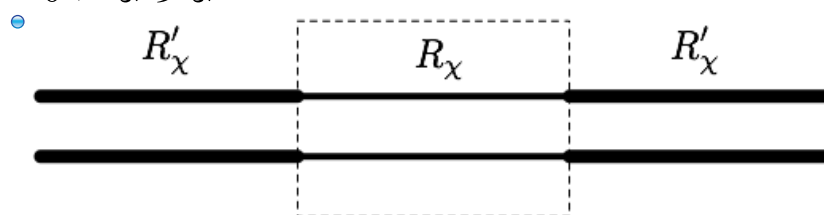
- 理由: 対角成分は反射係数で, 反射がないから

- 注意: ここでは $R_{\text{ref}}=R_x$ としてS行列を定義している

▽ここから推測できること

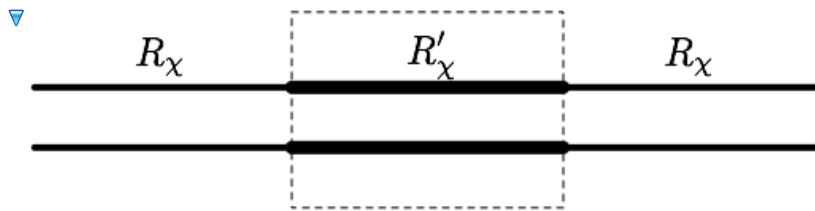
- 1. 考えてる2ポートが特性抵抗 R_x の伝送線路なら, $R_{\text{ref}}=R_x$ として定義したS行列の対角成分は0

- ▽ 2. $R_{\text{ref}} = R'_x (\neq R_x)$ としてS行列を定義したら, 対角成分は0にならない



- $$S_{(R'_x)} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & S'_{12} \\ S'_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

▽ 2ポートが特性抵抗 R'_x の伝送線路だったら S 行列の形は？



- $S_{(R_x)} = \begin{bmatrix} S''_{11} & S''_{12} \\ S''_{21} & S''_{22} \end{bmatrix}$

- $S_{(R'_x)} = \begin{bmatrix} 0 & S'''_{12} \\ S'''_{21} & 0 \end{bmatrix}$

▽ 長さ ℓ の無損失伝送線路の S 行列

- $S_{(R_{\text{ref}})} = \frac{1}{R_x^2 + R_{\text{ref}}^2 - j2R_x R_{\text{ref}} \cot(\beta\ell)} \begin{bmatrix} R_x^2 - R_{\text{ref}}^2 & -j2R_x R_{\text{ref}} / \sin(\beta\ell) \\ -j2R_x R_{\text{ref}} / \sin(\beta\ell) & R_x^2 - R_{\text{ref}}^2 \end{bmatrix}$

→ $S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\beta\ell} \\ e^{-\beta\ell} & 0 \end{bmatrix}$ if $R_{\text{ref}} = R_x$

- β は位相定数
- 上で考察した性質を確かに満たしている

◎ 以上の考察をより一般化すると、S 行列が「映像パラメータ」と密接に関係していることがわかる

S行列の種類

▼ 散乱されるのは何の波？

- 電圧
- 電流
- ▼ 電力の平方根の次元を持った波
 - 基準抵抗 R_{ref} で規格化された電圧・電流
 - 基準インピーダンス Z_{ref} で規格化された電圧・電流
 - 基準インピーダンス Z_{ref} で規格化された電力波 (power waves)

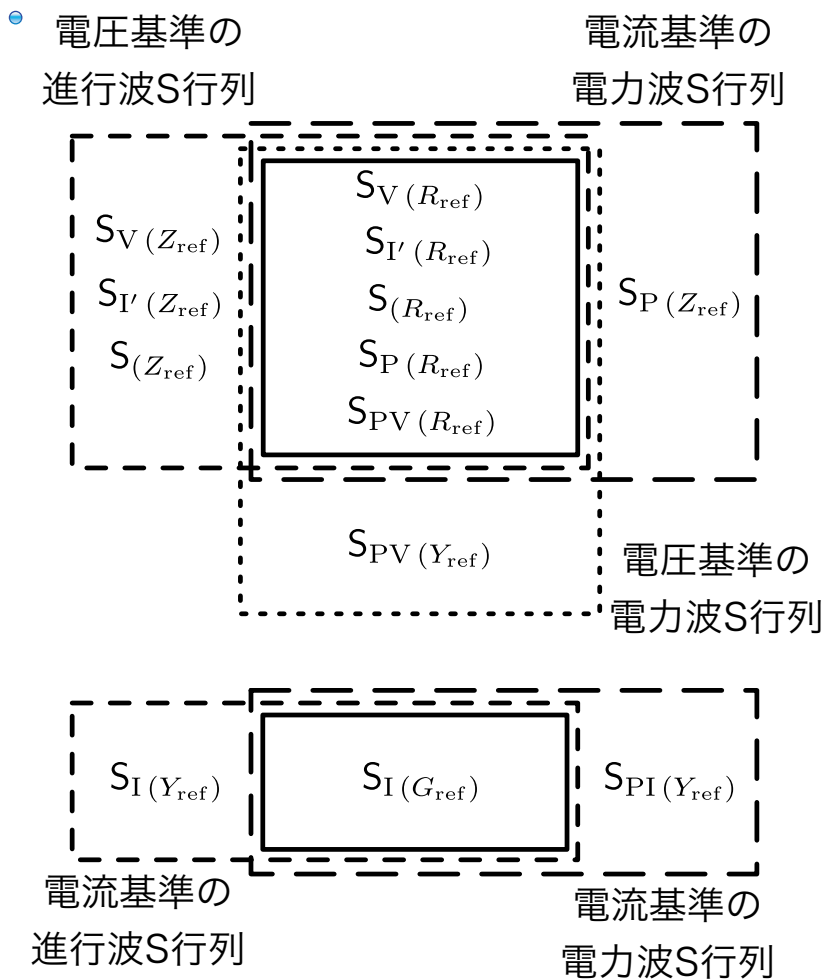
▼ S行列の種類

- ▼ 電圧進行波に対するS行列
 - R_{ref} または Z_{ref} を使って電流進行波と対応づけることもできる
- ▼ 電流進行波に対するS行列
 - 2種類考えられる
- ▼ 規格化された (電圧・電流) 進行波に対するS行列
 - R_{ref} (実数) で規格化 ← 単にS行列といったらフツーはコレのこと
 - Z_{ref} (複素数) で規格化
- ▼ 電力波に対するS行列 (一般化S行列, S_p 行列)
 - R_{ref} または Z_{ref} で規格化

波の種類	波の次元	S行列の記号	備考
Voltage waves	V	S_V	
Current waves	A	S_I	あまり使わない
		$S_{I'}$	ほとんど使わない
Normalized waves	\sqrt{W}	S	これが基本
Power waves	\sqrt{W}	$S_P, S_{P'}$	一般化S行列とも呼ばれる
		S_{PV}	ほとんど使わない
		S_{PI}	ほとんど使わない

- ここに挙げた以外の定義も考えられる

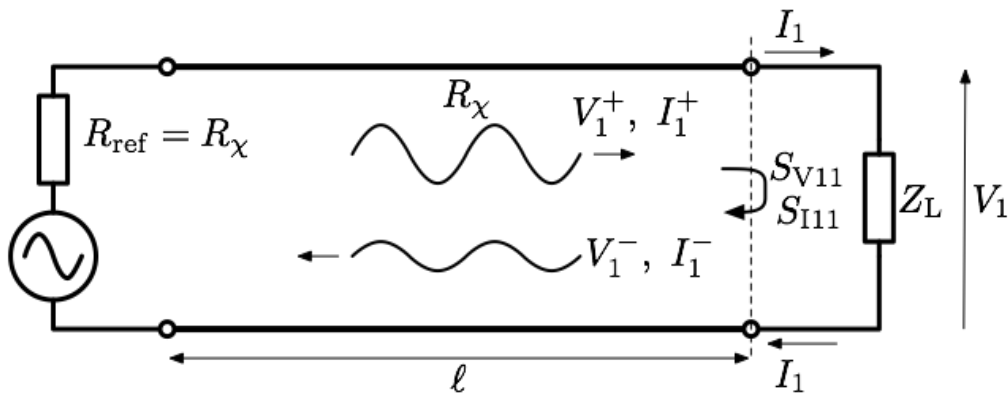
▼ 包含関係 (すべてのポートの基準インピーダンスが等しい場合)



- 「電圧基準」と「電流基準」の意味はあとで説明する
- 重なる部分が多いので、実用上はそれほど違いを気にしなくていいことが多い
- 基準インピーダンス Z_{ref} (または基準アドミッタンス Y_{ref}) が複素数の場合、進行波S行列 (左) と電力波S行列 (右) は性質がかなり違うので、どちらを考えてるのか注意が必要
- ④ ポートごとに基準抵抗/基準インピーダンスが違う場合は縮重が解けるので、要注意

電圧散乱行列

- ▼ 長さ ℓ の無損失伝送線路を介して励起される1ポートを考える



- ▼ 電圧進行波の定義

$$V_1^+ \triangleq \frac{V_1 + R_{\text{ref}} I_1}{2}$$

$$V_1^- \triangleq \frac{V_1 - R_{\text{ref}} I_1}{2}$$

- $R_{\text{ref}} (> 0)$ は「基準抵抗」で、 $R_{\text{ref}} = R_\chi$ とする。
- 注意：これらの電圧の波は、普通の（大きさが基準値に対する相対値になっているという）意味での「規格化」はされていないが、依然として定義に R_{ref} が必要なので、広い意味で「 R_{ref} で規格化されている (normalized to R_{ref}) 」という言い方をする

- ▼ 負荷端での電圧と電流

$$V_1 = V_1^+ + V_1^-$$

$$I_1 = I_1^+ + I_1^- \quad (\text{書き方その1})$$

- 注意：ここでは I^+ も I^- も右向きが正としている。
反射波は左向きだから、 $I'^+ = I^+$, $I'^- = -I^-$ として
 $I = I'^+ - I'^-$ (書き方その2)
と書く流儀もある。

- ▼ 電圧反射係数 (1ポートのSパラメータ)

$$S_{V11}(R_{\text{ref}}) \triangleq \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{V_1 - R_{\text{ref}}I_1}{V_1 + R_{\text{ref}}I_1} \quad \text{電圧反射係数}$$

▽ 基準インピーダンス Z_{ref} の使用

▽ 実は R_{ref} の代わりに Z_{ref} を使うのも可

$$V_i^+ \triangleq \frac{V_i + Z_{\text{ref}}I_i}{2}$$

$$V_i^- \triangleq \frac{V_i - Z_{\text{ref}}I_i}{2}$$

• Z_{ref} を使っても式の形はそのままだが、パワーの計算等に注意が必要になる

▽ 2ポート以上の電圧Sパラメータ

$$\begin{aligned} S_{Vji}(Z_{\text{ref}}) &= \left. \frac{V_j^-}{V_i^+} \right|_{V_{j(\neq i)}^+ = 0} \\ &= \frac{V_j - Z_{\text{ref}}I_j}{V_i + Z_{\text{ref}}I_i} = \frac{2V_j}{V_i + Z_{\text{ref}}I_i} \end{aligned}$$

• $j \neq i$ ならポート j は非励起ポートなので、 $V_j^+ = 0$ (入射波なし)。

したがって、 $V_j = -Z_{\text{ref}}I_j$ (I_j はポート j に流れ込む電流だから、マイナスが付く)。

• 2ポートの $S_{V21}(Z_{\text{ref}})$ は Z_{ref} で終端されてるときの順方向電圧ゲイン

▽ 1ポートに流れ込む電力

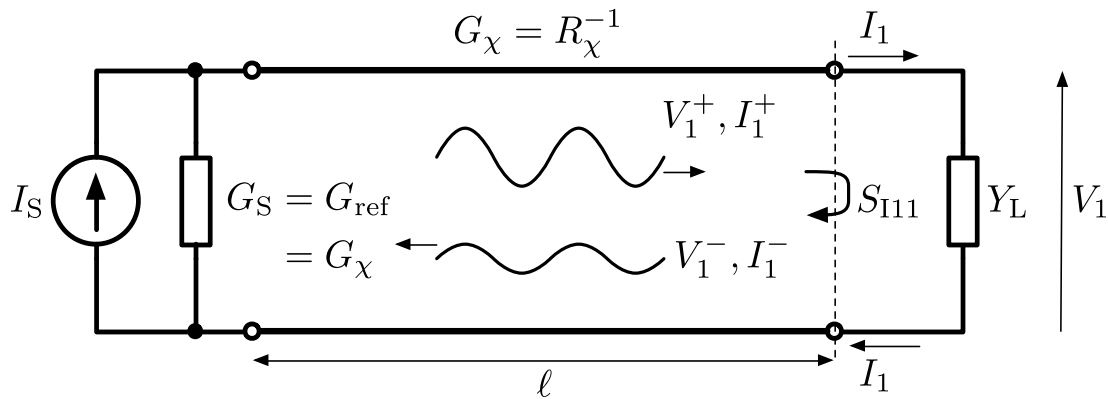
$$\begin{aligned} P_L &= \Re(V_{1,\text{rms}}I_{1,\text{rms}}^*) = \frac{1}{2}\Re(V_1I_1^*) \\ &= \frac{1}{2}\{[|V_1^+|^2 - |V_1^-|^2]\Re(Y_{\text{ref}}) + 2\Im(V_1^{+*}V_1^-)\Im(Y_{\text{ref}})\} \\ &= \frac{1}{2}\Re(Y_{\text{ref}})|V_1^+|^2 \left[1 - |S_{V11}|^2 + 2\Im(S_{V11})\frac{\Im(Y_{\text{ref}})}{\Re(Y_{\text{ref}})} \right] \end{aligned}$$

▽ 導出

- $$\begin{aligned}
V_1 I_1^* &= (V_1^+ + V_1^-)(I_1^+ + I_1^-)^* = (V_1^+ + V_1^-) \left(\frac{V_1^+ - V_1^-}{Z_{\text{ref}}} \right)^* \\
&= \frac{|V_1^+|^2 - |V_1^-|^2 + V_1^{+*} V_1^- - (V_1^{+*} V_1^-)^*}{Z_{\text{ref}}^*} \\
&= [|V_1^+|^2 - |V_1^-|^2 + 2j\Im(V_1^{+*} V_1^-)] Y_{\text{ref}}^* \\
&= [|V_1^+|^2 - |V_1^-|^2 + 2j\Im(V_1^{+*} V_1^-)] [\Re(Y_{\text{ref}}) - j\Im(Y_{\text{ref}})] \\
&= |V_1^+|^2 \left[1 - |S_{V11}|^2 + j \frac{2\Im(V_1^{+*} V_1^-)}{|V_1^+|^2} \right] [\Re(Y_{\text{ref}}) - j\Im(Y_{\text{ref}})]
\end{aligned}$$
- $$j \frac{2\Im(V_1^{+*} V_1^-)}{|V_1^+|^2} = \frac{V_1^{+*} V_1^- - V_1^+ V_1^{-*}}{V_1^{+*} V_1^+} = S_{V11} - S_{V11}^* = 2j\Im(S_{V11})$$

電流散乱行列（その1）

▼長さ ℓ の無損失伝送線路を介して励起される1ポートを考える



▼電流進行波（その1）の定義

$$I_1^+ \triangleq \frac{I_1 + G_{\text{ref}} V_1}{2} = \frac{V_1 + R_{\text{ref}} I_1}{2R_{\text{ref}}}$$

$$I_1^- \triangleq \frac{I_1 - G_{\text{ref}} V_1}{2} = -\frac{V_1 - R_{\text{ref}} I_1}{2R_{\text{ref}}}$$

• $G_{\text{ref}} = R_{\text{ref}}^{-1} (> 0)$ は「基準コンダクタンス」

▼電流反射係数（その1）

$$S_{111}(G_{\text{ref}}) \triangleq \frac{I_1^-}{I_1^+} = \frac{I_1 - G_{\text{ref}} V_1}{I_1 + G_{\text{ref}} V_1} = -\frac{V_1 - R_{\text{ref}} I_1}{V_1 + R_{\text{ref}} I_1}$$

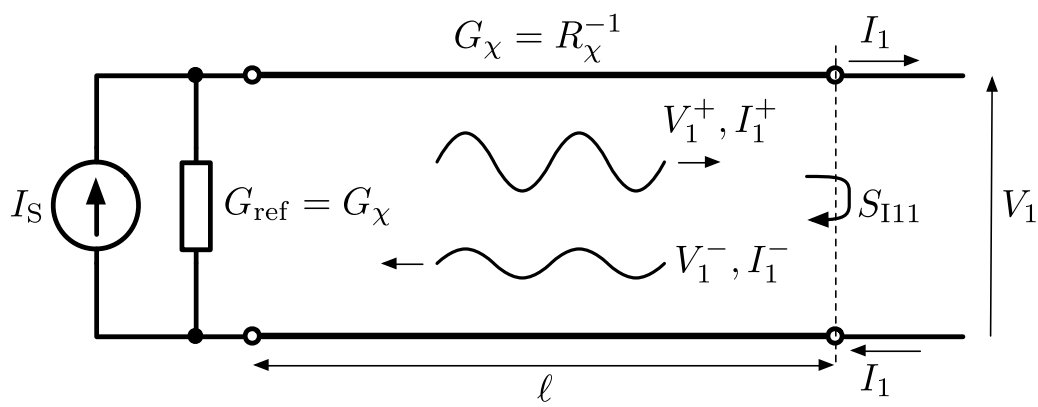
$$= -S_{V11}(G_{\text{ref}}^{-1})$$

▼負荷端での電圧と電流

$$V_1 = V_1^+ + V_1^- = V_1^+(1 + S_{V11})$$

$$I_1 = I_1^+ + I_1^- = I_1^+(1 + S_{111})$$

▼例：OPENの電流反射係数（その1）



▽ OPEN端では電流は流れないから

$$I_1 = I_1^+ + I_1^- = I_1^+(1 + S_{I11}) = 0$$

$$\therefore S_{I11} = -1$$

▽ このとき

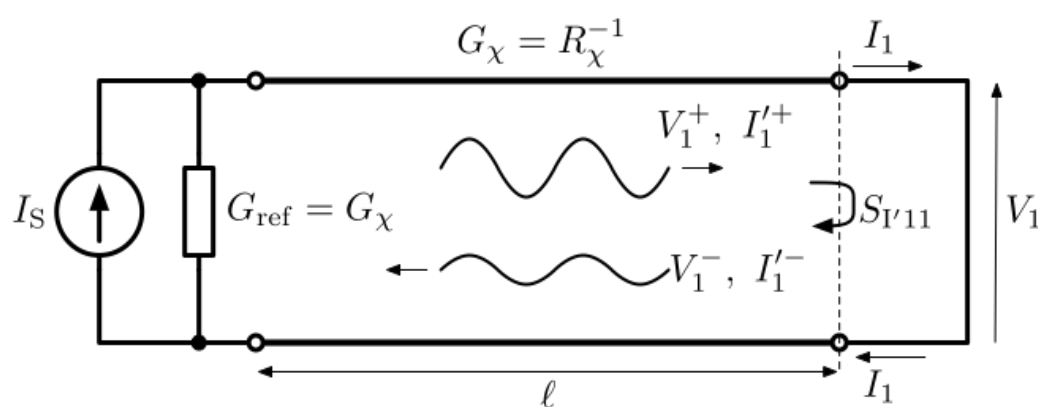
$$V_1 = (1 + S_{V11})V_1^+ = (1 + S_{V11})\frac{E_S}{2} = (1 + S_{V11})\frac{I_S}{2G_{\text{ref}}}$$

$$= \frac{I_S}{G_{\text{ref}}}$$

$$\therefore S_{V11} = 1$$

• V_1^+ の値は負荷に関係なく $\frac{E_S}{2}$ であることに注意

▽ 例：SHORTの電流反射係数（その1）



▽ SHORT端では電圧はゼロだから

$$V_1 = V_1^+ + V_1^- = V_1^+(1 + S_{V11}) = 0$$

$$\therefore S_{V11} = -1$$

▽ このとき

$$I_1 = (1 + S_{I11})I_1^+ = (1 + S_{I11})\frac{I_S}{2}$$

$$= I_S$$

$$\therefore S_{I11} = 1$$

▼ Complex normalization

- 基準アドミッタンス Y_{ref} を使って定義すると以下のようなになる

▼ 電流進行波 (その1)

$$\begin{aligned} I_i^+ &\triangleq \frac{I_i + Y_{\text{ref}} V_i}{2} = \frac{V_i + Z_{\text{ref}} I_i}{2Z_{\text{ref}}} \\ I_i^- &\triangleq \frac{I_i - Y_{\text{ref}} V_i}{2} = -\frac{V_i - Z_{\text{ref}} I_i}{2Z_{\text{ref}}} \end{aligned}$$

▼ 電流反射係数 (その1)

$$\begin{aligned} S_{111}(Y_{\text{ref}}) &= \frac{I_1^-}{I_1^+} \\ &= \frac{I_1 - Y_{\text{ref}} V_1}{I_1 + Y_{\text{ref}} V_1} \end{aligned}$$

▼ 電流Sパラメータ

$$S_{Iji}(Y_{\text{ref}}) = \left. \frac{I_j^-}{I_i^+} \right|_{I_{j(\neq i)}^+ = 0}$$

- これで定義したS行列が使われることはあまりない

電流散乱行列（その2）

▽ 負荷端での全電流

- $$I_1 = I_1^+ + I_1^- = I_1^+ - I_1'^-$$

▽ 電流進行波（その2）の定義

- $$I_1'^+ \triangleq I_1^+ = \frac{V_1 + R_{\text{ref}} I_1}{2R_{\text{ref}}}$$
$$I_1'^- \triangleq -I_1^- = \frac{V_1 - R_{\text{ref}} I_1}{2R_{\text{ref}}}$$

▽ 下記のように「電流反射係数（その2）」を定義すると電圧反射係数に一致する

- $$S_{I'11}(R_{\text{ref}}) \triangleq \frac{I_1'^-}{I_1'^+} = \frac{V_1 - R_{\text{ref}} I_1}{V_1 + R_{\text{ref}} I_1} \quad \text{電流反射係数（その2）}$$
$$= S_{V11}(R_{\text{ref}})$$

- このように定義された「電流反射係数」は実際にはほとんど使われない

- 定義（その2）に言及している文献としては Mavaddat がある

- 「電流反射係数（その1）」のほうが一般的だが、「電流反射係数（その2）」は一般化Sパラメータのサブセットになっていると解釈できる

▽ 基準インピーダンス Z_{ref} の使用

- $$I_i'^+ \triangleq \frac{V_i + Z_{\text{ref}} I_i}{2Z_{\text{ref}}} = \frac{I_i + Y_{\text{ref}} V_i}{2}$$
$$I_i'^- \triangleq \frac{V_i - Z_{\text{ref}} I_i}{2Z_{\text{ref}}} = -\frac{I_i - Y_{\text{ref}} V_i}{2}$$

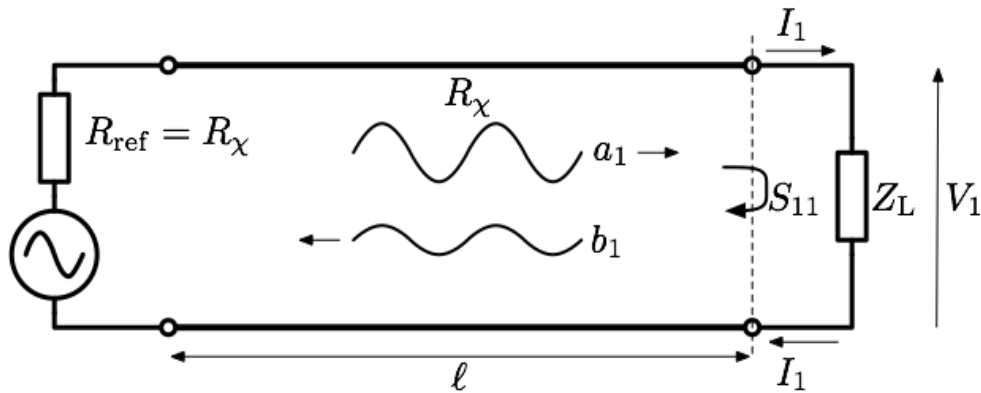
▽ 電流Sパラメータ（その2）

$$S_{I'ji}(z_{\text{ref}}) = \frac{I_j^-}{I_i^+} \Big|_{I_{j(\neq i)}^+ = 0}$$

- これは「電圧Sパラメータ」と一致するので実際はほとんど使われない

基準抵抗で規格化された波の散乱行列

▼長さ ℓ の無損失伝送線を介して励起される1ポートを考える



▼進行波の定義

$$a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{R_{\text{ref}}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^+}{\sqrt{R_{\text{ref}}}} + \sqrt{R_{\text{ref}}} I_1^+ \right) = \frac{V_1 + R_{\text{ref}} I_1}{2\sqrt{R_{\text{ref}}}} = \sqrt{R_{\text{ref}}} I_1^+$$

$$b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{R_{\text{ref}}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^-}{\sqrt{R_{\text{ref}}}} + \sqrt{R_{\text{ref}}} I_1^- \right) = \frac{V_1 - R_{\text{ref}} I_1}{2\sqrt{R_{\text{ref}}}} = -\sqrt{R_{\text{ref}}} I_1^-$$

- ただし $R_{\text{ref}} = R_{\chi} > 0$
- 2乗すると電力の次元になるように定義されてる
- V_1^+ , V_1^- と次元は違うが位相は同じ

▼反射係数 (1ポートのSパラメータ)

$$S_{11(R_{\text{ref}})} \triangleq \frac{b_1}{a_1} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = -\frac{I_1^-}{I_1^+} = \frac{V_1 - R_{\text{ref}} I_1}{V_1 + R_{\text{ref}} I_1}$$

$$= \frac{V_1/I_1 - R_{\text{ref}}}{V_1/I_1 + R_{\text{ref}}} = \frac{Z_L - R_{\text{ref}}}{Z_L + R_{\text{ref}}}$$

- 負荷インピーダンス Z_L が基準抵抗 R_{ref} に一致したら反射係数はゼロ
- ▼スミスチャートはこの式をもとに導出される
 - 上式はいわゆる一次分数変換 (linear fractional transformation, bilinear transformation) なので, Z_L は反射係数平面上に等角写像される

▼ 負荷に流れ込む電力

$$\begin{aligned} P_L &= \Re(V_{1,\text{rms}} I_{1,\text{rms}}^*) = \frac{1}{2} \Re(V_1 I_1^*) \\ &= \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2) = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2) \end{aligned}$$

▼ 導出

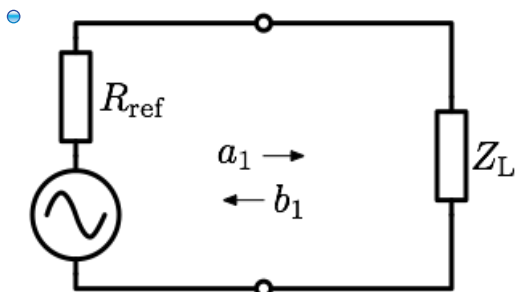
$$\begin{aligned} \bullet V_1 I_1^* &= (V_1^+ + V_1^-)(I_1^+ + I_1^-)^* \\ &= \frac{a_1 + b_1}{\sqrt{R_{\text{ref}}}} \cdot (a_1^* - b_1^*) \sqrt{R_{\text{ref}}} \\ &= |a_1|^2 - |b_1|^2 + a_1^* b_1 - (a_1^* b_1)^* \\ &= |a_1|^2 - |b_1|^2 + 2j\Im(a_1^* b_1) \end{aligned}$$

• $\frac{1}{2}|a_1|^2$, $\frac{1}{2}|b_1|^2$ はパワーの流れと解釈できる。

• したがって、 $|S_{11}|^2$ はパワーの反射係数と解釈できる。

▼ 媒質がない場合

• 伝送線路の長さを $\ell \rightarrow 0$ にしたら、式はそのまま「空間的な広がりを持った波」とは関係のない系（集中定数回路）の記述にも使える



- こうなると、もはや R_{ref} の値は R_x でなくてもいい
- ただし、その場合でも $R_{\text{ref}} > 0$ となるように R_{ref} を選ばなくてはならない。

▼ 基準抵抗 vs 特性抵抗

- 特性抵抗 R_x は、波の媒質（無損失伝送線路）の物理的な属性
- ▼ 基準抵抗 R_{ref} は、インピーダンスを反射係数に変換する時に使う基準値
 - R_{ref} は R_x に一致させるのが基本だが、媒質がないなら（あっても！）違う値を選んでいい

▼ 2ポート以上のSパラメータ

$$S_{ji}(R_{\text{ref}}) \triangleq \frac{b_j}{a_i} \Big|_{a_j(\neq i)=0}$$

$$a_i = \frac{V_i + R_{\text{ref}} I_i}{2\sqrt{R_{\text{ref}}}}$$

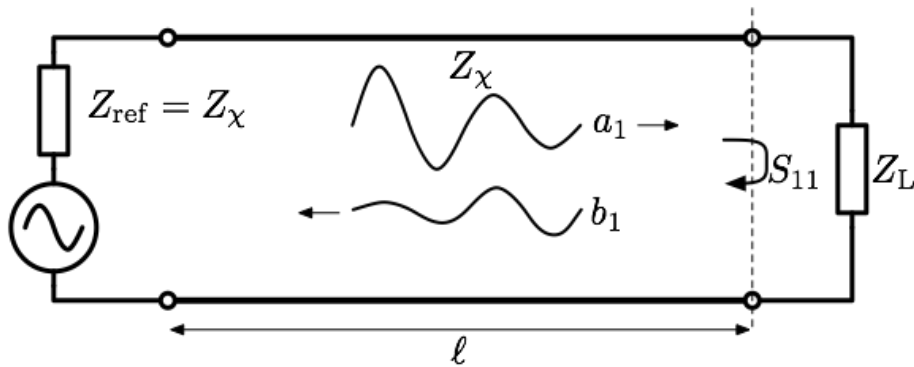
$$b_j = \frac{V_j - R_{\text{ref}} I_j}{2\sqrt{R_{\text{ref}}}}$$



基準インピーダンスで規格化された波の散乱行列

▼長さ ℓ の損失のある伝送線路を介して励起される1ポートを考える

- 伝送線路の特性インピーダンス Z_χ は複素数



▼ Z_χ は周波数に依存することに注意

- $$Z_\chi(\omega) = \left(\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \right)^{1/2}$$

▼進行波の定義

$$a_1 \triangleq \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}{|Z_{\text{ref}}|} \frac{V_1 + Z_{\text{ref}} I_1}{2}$$

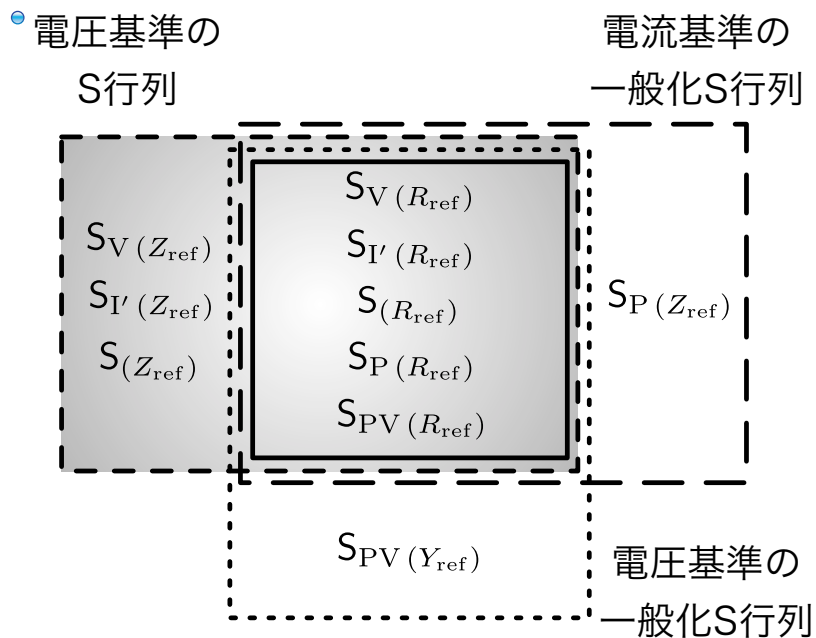
$$b_1 \triangleq \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}{|Z_{\text{ref}}|} \frac{V_1 - Z_{\text{ref}} I_1}{2}$$

- ただし $Z_{\text{ref}} = Z_\chi$, $\Re(Z_{\text{ref}}) > 0$

- 2乗すると電力の次元になる

▶ 電圧進行波 V_1^+ , V_1^- と次元は違うが位相は同じ.

▼前出の $Z_{\text{ref}} = R_{\text{ref}}$ の場合は, 特別なケースとして包含される



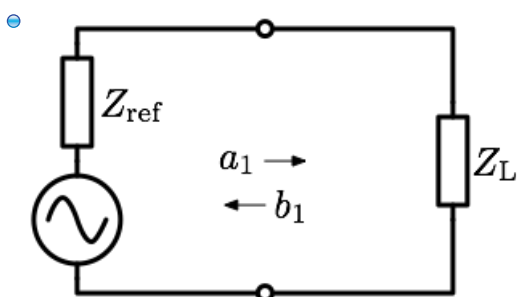
▽ 反射係数 (1ポートのSパラメータ)

$$\begin{aligned}
 S_{11}(Z_{\text{ref}}) &\triangleq \frac{b_1}{a_1} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = -\frac{I_1^-}{I_1^+} \\
 &= \frac{V_1 - Z_{\text{ref}} I_1}{V_1 + Z_{\text{ref}} I_1} = \frac{V_1/I_1 - Z_{\text{ref}}}{V_1/I_1 + Z_{\text{ref}}} \\
 &= \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}}{Z_L + Z_{\text{ref}}}
 \end{aligned}$$

- 負荷インピーダンス Z_L が基準インピーダンス $Z_{\text{ref}} (=Z_x)$ に一致したら、反射係数はゼロ

▽ 媒質がない場合

- 伝送線路の長さを $\ell \rightarrow 0$ にしたら、式はそのまま「空間的な広がりを持った波」とは関係のない系 (集中定数回路) の記述にも使える



- こうなると、もはや Z_{ref} の値は Z_x でなくてもいい
- ただし、その場合でも $\Re(Z_{\text{ref}}) > 0$ となるように Z_{ref} を選ばなくてはならない。

▽ 基準インピーダンス vs 特性インピーダンス

- 特性インピーダンス Z_χ は、波の媒質（伝送線路）の物理的な属性
- ▽ 基準インピーダンス Z_{ref} は、インピーダンスを反射係数に変換する時に使う基準値
 - Z_{ref} は Z_χ に一致させるのが基本だが、違う値を選ぶこともできる
- ▽ Z_χ と Z_{ref} の混同を避けるため、本稿では Z_0 という記号は使っていない
 - Z_χ : χ aracteristic impedance
 - Z_{ref} : reference impedance

▽ 2ポート以上のSパラメータ

- $$S_{ji}(Z_{\text{ref}}) \triangleq \left. \frac{b_j}{a_i} \right|_{a_{j(\neq i)}=0}$$
- $$a_i = \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})} V_i + Z_{\text{ref}} I_i}{|Z_{\text{ref}}| 2}$$
- $$b_j = \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})} V_j - Z_{\text{ref}} I_j}{|Z_{\text{ref}}| 2}$$

▽ 例：伝送線路のS行列

- $$S_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}}^2 + 2Z_\chi Z_{\text{ref}} \coth(\gamma\ell)} \begin{bmatrix} Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2 & 2Z_\chi Z_{\text{ref}} / \sinh(\gamma\ell) \\ 2Z_\chi Z_{\text{ref}} / \sinh(\gamma\ell) & Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2 \end{bmatrix}$$
- $$\rightarrow S_{(Z_\chi)} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma\ell} \\ e^{-\gamma\ell} & 0 \end{bmatrix}$$

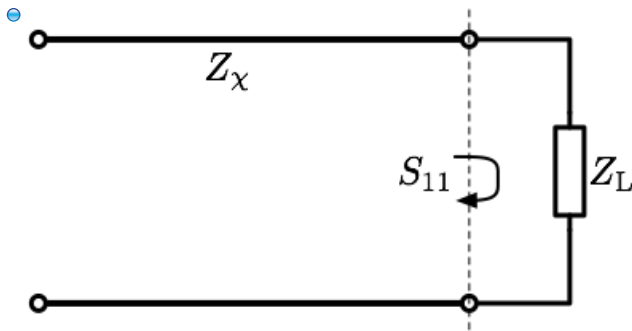
▽ 複素数の Z_{ref} はホントに必要？

- ▽ Z_{ref} が実数固定値（50Ωとか）のほうが好ましいこともある
 - Touchstone ファイルフォーマット（.s2p等）は周波数依存の基準インピーダンスに対応してない
 - シミュレータ等の回路行列操作関数とかも、周波数依存の基準インピーダンスに対応してないかもしれない
 - スミスチャートの中心に対応するインピーダンスが複素数で、しかも周波数に依存してたらわかりにくい
- ▽ 常に $Z_{\text{ref}}=50\Omega$ とするのもアリ？
 - ▽ NO
 - 測定・データ処理のやり方によっては、 Z_{ref} が実数固定値でなく、 $Z_{\text{ref}}=Z_\chi$ のS行列が出てくることがある

- ◎ TSD (thru-short-delay) やTRL (thru-reflect-line) でde-embedした
ときがこれに該当する

反射係数の絶対値が1を超える？

▽ 伝送線路が受動素子 Z_L で終端されているとする



▽ 負荷端での反射係数は

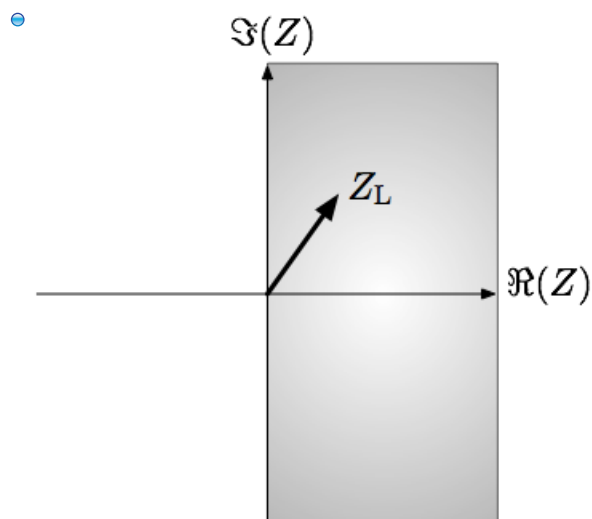
$$S_{11}(Z_{\text{ref}}) = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}}{Z_L + Z_{\text{ref}}} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$$

ただし $z_L \triangleq \frac{Z_L}{Z_{\text{ref}}}$, $Z_{\text{ref}} = Z_\chi$

▽ Z_L の偏角は？

$$Z_L = R_L + jX_L \quad (\text{Passive だから } R_L \geq 0)$$

▽ Z_L はインピーダンス平面の右半面上にある



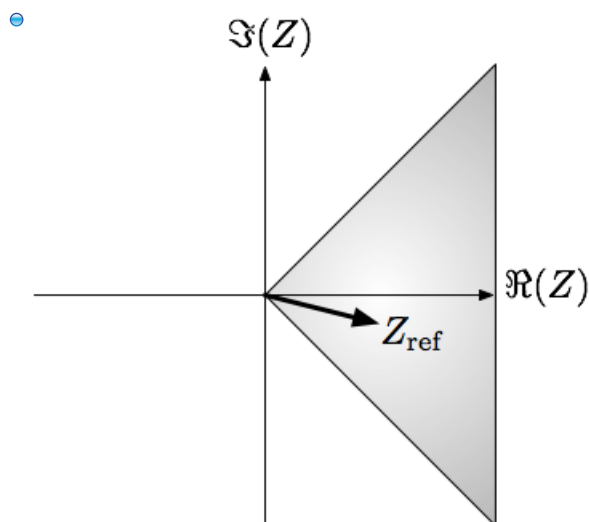
$$|\arg Z_L| \leq \frac{\pi}{2}$$

▽ Z_{ref} の偏角は？

▶ $Z_{\text{ref}} = Z_{\chi} = \left(\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \right)^{1/2}$. ただし $R, L, C, G > 0$ とする.

• $\Re(Z_{\text{ref}}) > 0$ であり, $z^{1/2} = \pm\sqrt{|z|} \exp\left(j\frac{\arg z}{2}\right)$ だから

$$\boxed{|\arg Z_{\text{ref}}| < \frac{\pi}{4}}$$



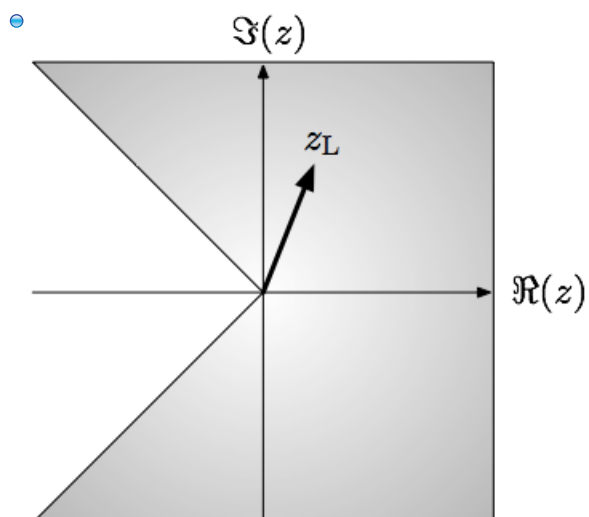
• Z_{ref} が実数なら, 当然 $\arg Z_{\text{ref}} = 0$.

▼ 反射係数 S_{11}

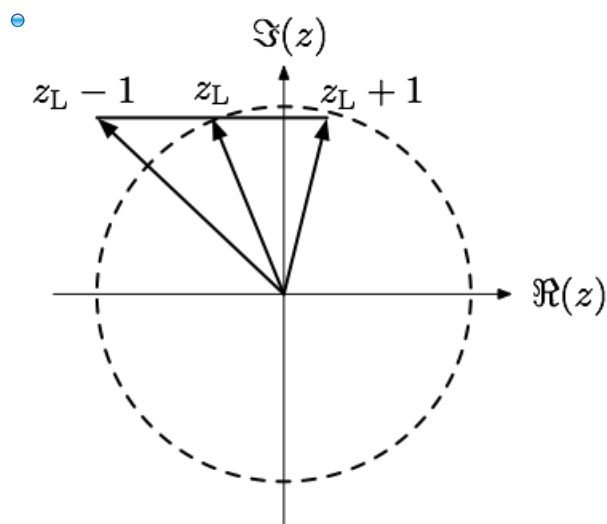
• $z_1 \triangleq |z_1| e^{j\theta_1}$, $z_2 \triangleq |z_2| e^{j\theta_2}$ に対して

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}.$$

• $z_L = \frac{Z_L}{Z_{\text{ref}}}$ だから $\boxed{|\arg z_L| < \frac{3\pi}{4}}$



▼ $S_{11} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$ の分母・分子を複素平面上で見ると



- 上図より、分子のほうが分母より長くなりうる
- したがって、 $|S_{11}| > 1$ になりうる。

▼ 式による確認：反射係数 S_{11} の絶対値の2乗

- $|S_{11}|^2 = S_{11}S_{11}^* = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \cdot \frac{z_L^* - 1}{z_L^* + 1} = \frac{|z_L|^2 + 1 - 2\Re(z_L)}{|z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)}$
- $|\arg z_L| < 135^\circ$ だから $\Re(z_L)$ は正にも負にもなれる。
 $\Re(z_L) < 0$ なら $|S_{11}| > 1$.

◎ ▼ Z_{ref} が複素数なら $|S_{11}| > 1$ になりうる。

- ちなみに Z_{ref} が実数なら $|\arg z_L| \leq \frac{\pi}{2}$ だから、必ず $\Re(z_L) \geq 0$ 。
 したがって $|S_{11}| \leq 1$ 。

▶ $\max |S_{11}| = 1 + \sqrt{2}$ when $|\arg z_L| = \frac{3\pi}{4}, |z_L| = 1$

- 仮に $|S_{11}| > 1$ になったとしても、その場合、伝送線路には損失があるわけだから、負荷から離れると $|S_{11}|$ はじき1より小さくなる。
- 現実には Z_χ が大きな虚部を持つことはないので、 $Z_{\text{ref}} = Z_\chi$ でも $|S_{11}| > 1$ になることは少ないし、なったとしても1に近い値になる。

▽ エネルギーの保存則には抵触しない？

• 大丈夫

▽ 負荷に流れ込む電力は

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} \Re(V_1 I_1^*) \\ &= \frac{1}{2} \left[|a_1|^2 - |b_1|^2 - 2\Im(a_1^* b_1) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \right] \\ &= \frac{1}{2} |a_1|^2 \left[1 - |S_{11}|^2 - 2\Im(S_{11}) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \right] \end{aligned}$$

▽ 導出

$$\begin{aligned} \bullet V_1 I_1^* &= (V_1^+ + V_1^-)(I_1^+ + I_1^-)^* \\ &= \frac{|Z_{\text{ref}}|}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}} (a_1 + b_1)(a_1^* - b_1^*) \frac{|Z_{\text{ref}}|}{Z_{\text{ref}}^* \sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}} \\ &= [|a_1|^2 - |b_1|^2 + a_1^* b_1 - (a_1^* b_1)^*] \frac{|Z_{\text{ref}}|^2}{\Re(Z_{\text{ref}})} \frac{1}{Z_{\text{ref}}^*} \\ &= [|a_1|^2 - |b_1|^2 + 2j\Im(a_1^* b_1)] \frac{|Z_{\text{ref}}|^2}{\Re(Z_{\text{ref}})} \frac{\Re(Z_{\text{ref}}) + j\Im(Z_{\text{ref}})}{|Z_{\text{ref}}|^2} \\ &= [|a_1|^2 - |b_1|^2 + 2j\Im(a_1^* b_1)] \left[1 + j \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \right] \end{aligned}$$

$$\bullet j \frac{2\Im(a_1^* b_1)}{|a_1|^2} = \frac{a_1^* b_1 - a_1 b_1^*}{a_1^* a_1} = S_{11} - S_{11}^* = 2j\Im(S_{11})$$

• Z_{ref} が複素数なら、もはや $\frac{1}{2}|a_1|^2$ や $\frac{1}{2}|b_1|^2$ をパワーの流れと考えるわけにはいかない。

• したがって、 Z_{ref} が複素数なら $|S_{11}|^2$ はパワーの反射係数ではない。

▽ $P_L \geq 0$ だといえる？

▽ ▼ YES

• そのためには、

$$|S_{11}|^2 + 2\Im(S_{11}) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq 1$$

が示せばいい。

$$\begin{aligned} \bullet 2j\Im(S_{11}) &= S_{11} - S_{11}^* = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} - \frac{z_L^* - 1}{z_L^* + 1} \\ &= \frac{2(z_L - z_L^*)}{|z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)} = \frac{4j\Im(z_L)}{|z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)} \end{aligned}$$

- $|S_{11}|^2 + 2\Im(S_{11}) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} = \frac{|z_L|^2 + 1 - 2\Re(z_L)}{|z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)} + \frac{4\Im(z_L)}{|z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)} \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq 1$

が示せばいい。

- $|z_L|^2 + 1 - 2\Re(z_L) + 4\Im(z_L) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq |z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)$

が示せばいい。

- $|z_L|^2 + 1 - 2\Re(z_L) + 4\Im(z_L) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq |z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)$

が示せばいい。

- $\Im(z_L) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq \Re(z_L)$ が示せばいい。

- $$z_L = \frac{Z_L}{Z_{\text{ref}}} = \frac{\Re(Z_L) + j\Im(Z_L)}{\Re(Z_{\text{ref}}) + j\Im(Z_{\text{ref}})} = \frac{[\Re(Z_L) + j\Im(Z_L)][\Re(Z_{\text{ref}}) - j\Im(Z_{\text{ref}})]}{|Z_{\text{ref}}|^2}$$

$$= \frac{\Re(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}}) + \Im(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}}) + j[\Im(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}}) - \Re(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}})]}{|Z_{\text{ref}}|^2}$$

- $\Re(z_L) = \frac{\Re(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}}) + \Im(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}})}{|Z_{\text{ref}}|^2}$

$$\Im(z_L) = \frac{\Im(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}}) - \Re(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}})}{|Z_{\text{ref}}|^2}$$

- $[\Im(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}}) - \Re(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}})] \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq \Re(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}}) + \Im(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}})$

が示せばいい。

- $\Im(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}}) - \Re(Z_L) \frac{[\Im(Z_{\text{ref}})]^2}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq \Re(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}}) + \Im(Z_L)\Im(Z_{\text{ref}})$

が示せばいい。

- $-\Re(Z_L) \frac{[\Im(Z_{\text{ref}})]^2}{\Re(Z_{\text{ref}})} \leq \Re(Z_L)\Re(Z_{\text{ref}})$ が示せばいい。

- $-\Im(Z_{\text{ref}})]^2 \leq [\Re(Z_{\text{ref}})]^2$ が示せばいい。明らかにこれは成り立つ。

▽ 結論

- Z_{ref} が虚部を持つなら、反射係数の絶対値が1を超えることもある
- 反射係数の絶対値が1を超えても、エネルギー保存則が破られているわけではない
- Z_{ref} が虚部を持つなら、反射係数がスミスチャート上で単位円の外に出たからといって、直ちに負荷が active であることを意味しない

▽ 文献

- ④ R. J. Vernon and S. R. Seshadri, "Reflection coefficient and reflected power on a lossy transmission line," Proc. IEEE, vol. 57, no. 1, pp. 101–102, 1969.
- ④ J. Kretzschmar and D. Schoonaert, "Smith chart for lossy transmission lines," Proc. IEEE, vol. 57, no. 9, pp. 1658–1660, 1969.



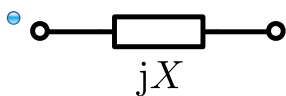
Passive 回路網の透過係数の絶対値が1を超える？

▼受動回路網の反射係数 (S_{11} , S_{22} 等) の絶対値は、1を超えることがある

- 基準インピーダンスが虚部を持つなら、そのようなことが起こりうる

▶ それでは、受動2ポートの透過係数 (S_{21} , S_{12}) の絶対値も1を超えることがある？

▼例：直列リアクタンス (jX) の透過係数



- $$S_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{jX + 2Z_{\text{ref}}} \begin{bmatrix} jX & 2Z_{\text{ref}} \\ 2Z_{\text{ref}} & jX \end{bmatrix}$$

- $$S_{21} = \frac{2Z_{\text{ref}}}{jX + 2Z_{\text{ref}}}$$

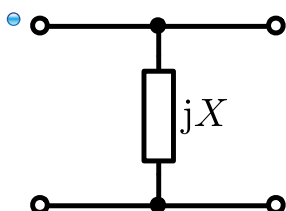
- $$\begin{aligned} |S_{21}|^2 &= \frac{2Z_{\text{ref}}}{jX + 2Z_{\text{ref}}} \cdot \frac{2Z_{\text{ref}}^*}{-jX + 2Z_{\text{ref}}^*} \\ &= \frac{4|Z_{\text{ref}}|^2}{X^2 - 2jX(Z_{\text{ref}} - Z_{\text{ref}}^*) + 4|Z_{\text{ref}}|^2} \\ &= \frac{4|Z_{\text{ref}}|^2}{X^2 + 4X\Im(Z_{\text{ref}}) + 4|Z_{\text{ref}}|^2} \end{aligned}$$

- たとえば、 $X = 1$, $Z_{\text{ref}} = e^{-j(\pi/4)}$ なら

$$|S_{21}|^2 = \frac{4 \cdot |1|^2}{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot |1|^2} = \frac{4}{5 - 2.83} > 1$$

▶

▼例：シャントリアクタンス (jX) の透過係数



- $$S_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{2jX + Z_{\text{ref}}} \begin{bmatrix} -Z_{\text{ref}} & 2jX \\ 2jX & -Z_{\text{ref}} \end{bmatrix}$$

- $$S_{21} = \frac{2jX}{2jX + Z_{\text{ref}}}$$

- ▶
$$\begin{aligned} |S_{21}|^2 &= \frac{2jX}{2jX + Z_{\text{ref}}} \cdot \frac{-2jX}{-2jX + Z_{\text{ref}}^*} \\ &= \frac{4X^2}{|Z_{\text{ref}}|^2 - 2jX(Z_{\text{ref}} - Z_{\text{ref}}^*) + 4X^2} \\ &= \frac{4X^2}{|Z_{\text{ref}}|^2 + 4X\Im(Z_{\text{ref}}) + 4X^2} \end{aligned}$$

- たとえば, $X = -1$, $Z_{\text{ref}} = e^{j(\pi/4)}$ なら

$$|S_{21}|^2 = \frac{4}{|1|^2 - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4} = \frac{4}{5 - 2.83} > 1$$

▼文献

- ◎ S. Amakawa, "Scattered reflections on scattering parameters—Demystifying complex-referenced S parameters—," IEICE Trans. Electronics, vol. E99-C, no. 10, pp. 1100–1112, October 2016.

特性インピーダンス vs 基準インピーダンス

▼ クイズ

- 伝送線路中の電流や電圧などの「物理的な波」の反射・透過は、 Z_{ref} の選び方とは無関係に決まるはずのものではないのか？ Z_{ref} の選び方次第で反射係数や透過係数がどうにでもなってしまうというのは、変ではないか？

▼

- $Z_{\text{ref}}=Z_{\chi}$ ならば、Sパラは実際につないである伝送線路中の「物理的な波」の反射係数・透過係数を与える
- $Z_{\text{ref}}\neq Z_{\chi}$ ならば、Sパラは「もし特性インピーダンスが $Z_{\chi}=Z_{\text{ref}}$ の仮想媒質がつながったとしたら反射係数・透過係数がどうなるか」を表す。実際の媒質中の波との対応はつかない

シグナルフローグラフ

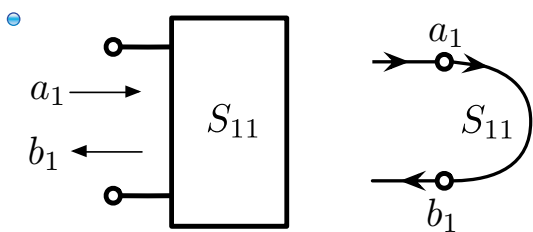
▽シグナルフローグラフとは？

- 進行波の伝搬をグラフで図形的に表現したもの
- S行列による回路網記述と相性がいい
- まず直観的にわかりやすいシグナルフローグラフを描いて、それを見ながら式を書き下すことができる

▽ノードとブランチ

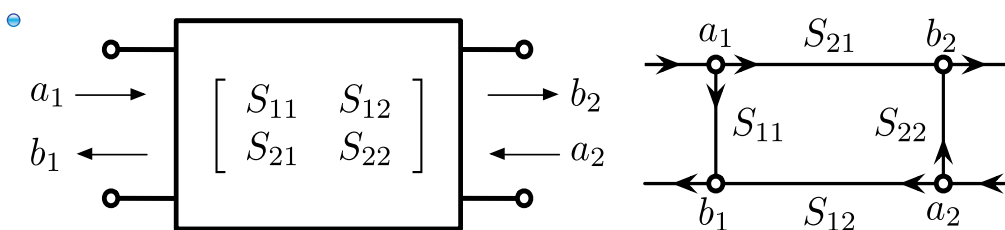
- ノードには波変数 (a_i や b_j) を対応づける
- ブランチにはSパラメータ (S_{ji}) を対応づける

▽1ポートのシグナルフローグラフ



- $b_1 = S_{11}a_1$

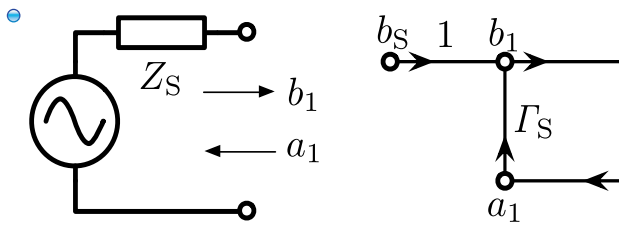
▽2ポートのシグナルフローグラフ



- $b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$

- $b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$

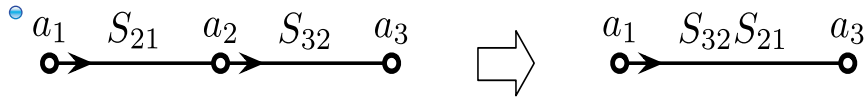
▽信号源のシグナルフローグラフ



- $b_1 = b_S + \Gamma_S a_1$

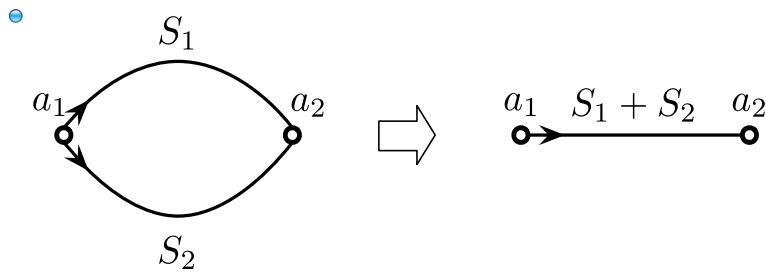
▼シグナルフローグラフ変形の規則

▼規則1：直列ブランチの簡約化



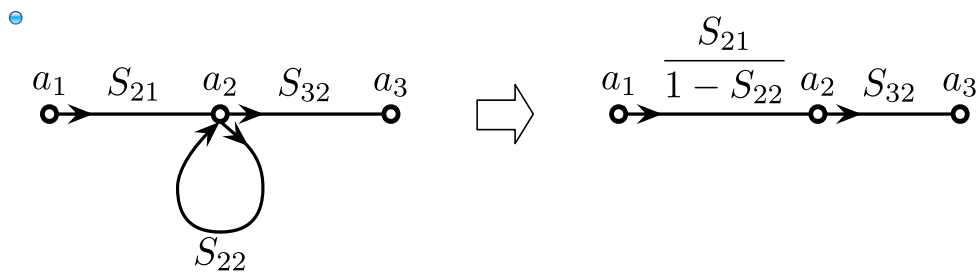
- $a_3 = S_{32} a_2 = S_{32} S_{21} a_1$

▼規則2：並列ブランチの簡約化



- $a_2 = (S_1 + S_2) a_1$

▼規則3：自己ループ



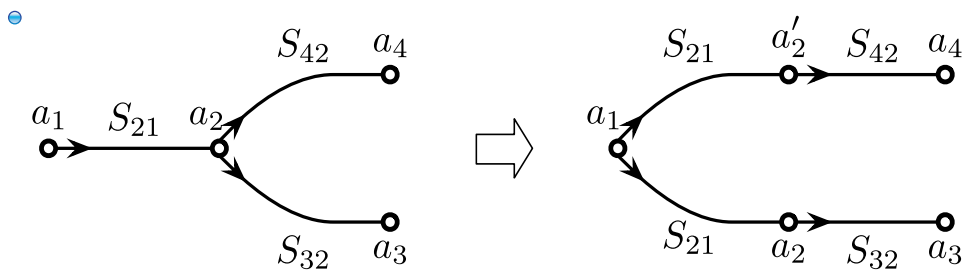
▼ $a_3 = \frac{S_{32} S_{21}}{1 - S_{22}} a_1$

▼導出

- $a_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$
- $(1 - S_{22}) a_2 = S_{21} a_1$
- $\therefore a_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22}} a_1$

▼規則4：ブランチ（とその始点または終点ノード）の分割

▼例： S_{21} の終点を分割する



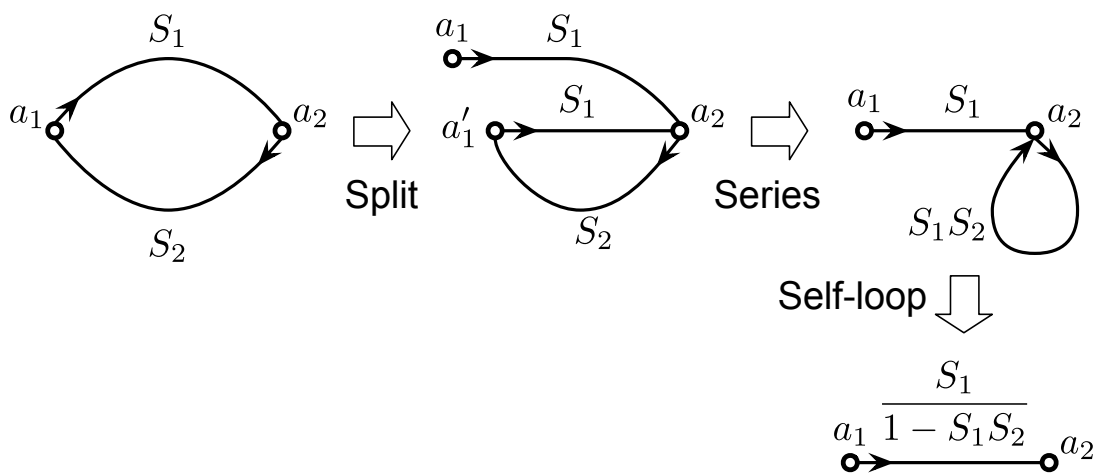
- $$a_4 = S_{42}a_2 = S_{42}S_{21}a_1$$

$$a_3 = S_{32}a_2 = S_{32}S_{21}a_1$$

▼注意

- 縦続接続するとき、接続面の基準インピーダンスが一致していなければならない

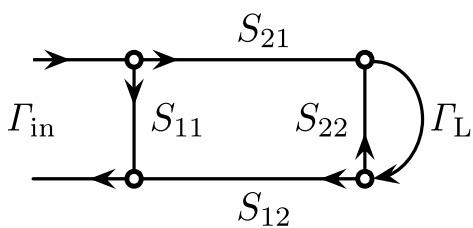
▼例：フィードバックループの式の導出



- 分割ルール、直列ルール、自己ループルールを適用して変形

- $$a_2 = \frac{S_1}{1 - S_1S_2} a_1$$

▼例：2ポートによる反射係数の変換



- 並列、自己ループ、直列の組み合わせで次式を得る

- $$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}\Gamma_L S_{21}}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$

基準インピーダンスの変更 (1)

- 基準インピーダンスを変更したら「もし媒質を交換したら、その仮想媒質中にどんな反射波・透過波が生じるか」がわかる

▽ 基準インピーダンス変更 (renormalization transformation) の手順の考え方

- ▽ 1. まず元のS行列の基準インピーダンス Z_{ref} を使ってZ行列かY行列に変換する

- $$Z_{11} = \frac{1 + S_{11}(Z_{\text{ref}})}{1 - S_{11}(Z_{\text{ref}})} \cdot Z_{\text{ref}}$$

- ▽ 2. つぎに新しい基準インピーダンス Z'_{ref} を使ってS行列に変換する

- $$S'_{11}(Z'_{\text{ref}}) = \frac{Z_{11} - Z'_{\text{ref}}}{Z_{11} + Z'_{\text{ref}}}$$

- 注意：当然のことながら、Z行列やY行列が存在しない回路網についてはこの手順を実際にたどることはできないので、Z行列やY行列を消去してある式が必要

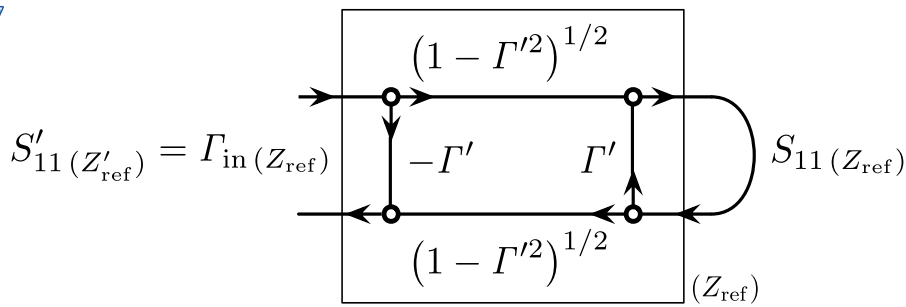
▽ 1ポートの renormalization transform

- ▽
$$S'_{11}(Z'_{\text{ref}}) = \Gamma_{\text{in}}(Z_{\text{ref}}) = \left\{ \frac{S_{11} - \Gamma'}{1 - \Gamma' S_{11}} \right\}_{(Z_{\text{ref}})}, \quad \Gamma'_{(Z_{\text{ref}})} \triangleq \frac{Z'_{\text{ref}} - Z_{\text{ref}}}{Z'_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}}}$$

▽ 導出

- $$\begin{aligned} S'_{11}(Z'_{\text{ref}}) &= \frac{Z_{11} - Z'_{\text{ref}}}{Z_{11} + Z'_{\text{ref}}} = \frac{\frac{1+S_{11}(Z_{\text{ref}})}{1-S_{11}(Z_{\text{ref}})} \cdot Z_{\text{ref}} - Z'_{\text{ref}}}{\frac{1+S_{11}(Z_{\text{ref}})}{1-S_{11}(Z_{\text{ref}})} \cdot Z_{\text{ref}} + Z'_{\text{ref}}} \\ &= \frac{(1 + S_{11}(Z_{\text{ref}})) Z_{\text{ref}} - (1 - S_{11}(Z_{\text{ref}})) Z'_{\text{ref}}}{(1 + S_{11}(Z_{\text{ref}})) Z_{\text{ref}} + (1 - S_{11}(Z_{\text{ref}})) Z'_{\text{ref}}} \\ &= \frac{S_{11}(Z_{\text{ref}})(Z_{\text{ref}} + Z'_{\text{ref}}) + Z_{\text{ref}} - Z'_{\text{ref}}}{S_{11}(Z_{\text{ref}})(Z_{\text{ref}} - Z'_{\text{ref}}) + Z_{\text{ref}} + Z'_{\text{ref}}} \\ &= \frac{S_{11}(Z_{\text{ref}}) - \frac{Z'_{\text{ref}} - Z_{\text{ref}}}{Z'_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}}}}{1 - \frac{Z'_{\text{ref}} - Z_{\text{ref}}}{Z'_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}}} S_{11}(Z_{\text{ref}})} \end{aligned}$$

- ▽ この式をシグナルフローグラフで表すと、たとえば



●

$$S'_{11}(Z'_{ref}) = \Gamma_{in}(Z_{ref}) = \left\{ -\Gamma' + \frac{(1 - \Gamma'^2)S_{11}}{1 - \Gamma'S_{11}} \right\}_{(Z_{ref})} = \left\{ \frac{S_{11} - \Gamma'}{1 - \Gamma'S_{11}} \right\}_{(Z_{ref})}$$

▼

$$S_{reno}(Z_{ref}) = \begin{bmatrix} -\Gamma' & (1 - \Gamma'^2)^{1/2} \\ (1 - \Gamma'^2)^{1/2} & \Gamma' \end{bmatrix}_{(Z_{ref})} \quad \text{のポート 2 を}$$

$S_{11}(Z_{ref})$ で終端してポート 1 からのぞき込んだときの反射係数の値 $\Gamma_{in}(Z_{ref})$ が $S'_{11}(Z'_{ref})$ に等しくなる。

●

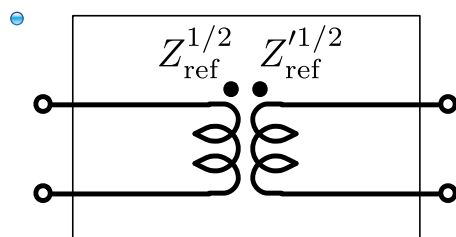
$$S_{reno}(Z_{ref}) \text{ は複素直交行列. } S_{reno}^{-1}(Z_{ref}) = S_{reno}^T(Z_{ref})$$

▶

$$R_{reno}(Z_{ref}) = \frac{1}{(1 - \Gamma'^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & -\Gamma' \\ -\Gamma' & 1 \end{bmatrix}$$

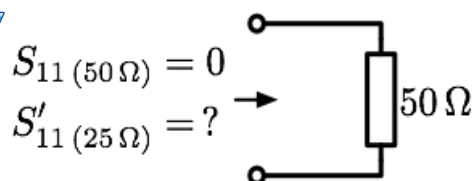
● 注意： $\Gamma_{in}(Z_{ref})$ と $S'_{11}(Z'_{ref})$ は値は一致するが、物理的にはそれぞれ別のものを表す。このことは回路シミュレーションで renormalization transform する際に覚えておく必要がある。

▼ この2ポートは理想トランス（の一種）を表す



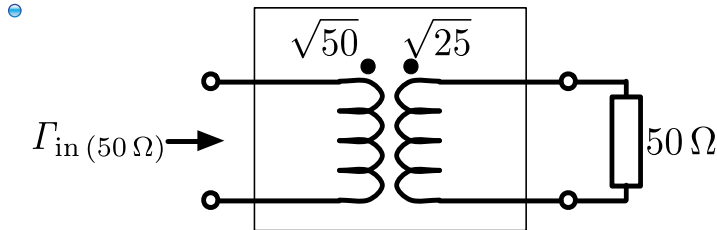
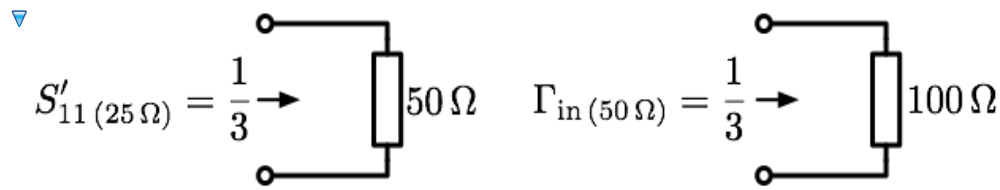
▶ 補足：上記以外にも同じ結果を与える2ポートはある

▼ 例題： $S_{11}(50\Omega) = 0$ を $Z'_{ref} = 25\Omega$ のもとでの反射係数に変換する。



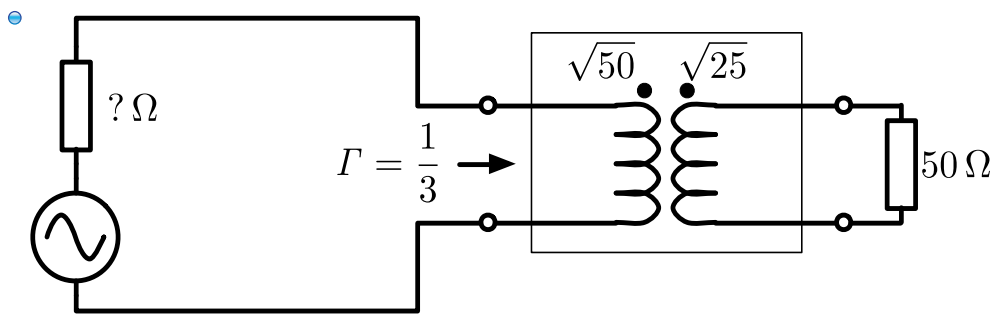
$$\Gamma'_{(50\Omega)} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3}$$

$$S'_{11(25\Omega)} = \Gamma_{in(50\Omega)} = \left\{ \frac{S_{11} - \Gamma'}{1 - \Gamma' S_{11}} \right\}_{(50\Omega)} = \frac{0 - (-1/3)}{1 - (-1/3) \times 0} = \frac{1}{3}$$



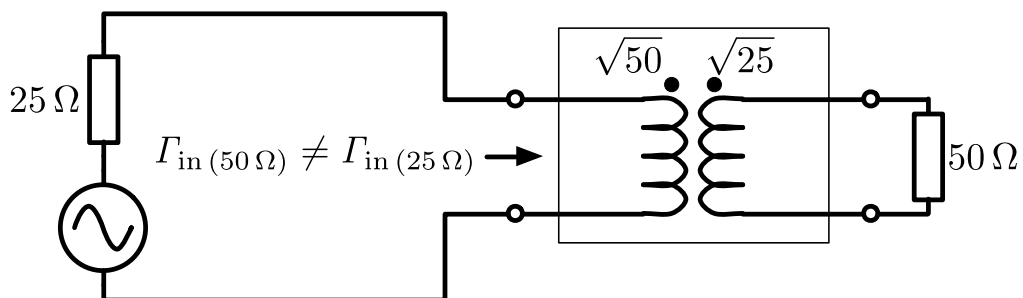
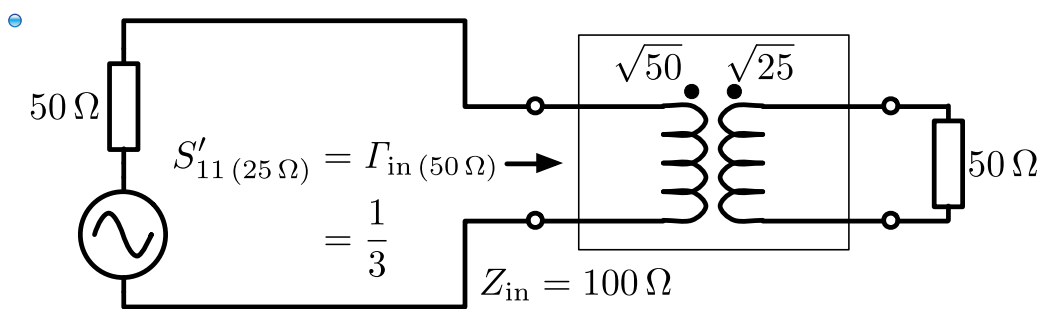
▼ クイズ

- シミュレーションで正解を得るのに必要なポート抵抗は？



▼ ▼

▼ Renormalization transform を回路シミュレーションで済ませる際には「ポート」の基準インピーダンスの設定に注意



▼2ポート以上の renormalization transform

▼全ポートの基準インピーダンスが揃ってる場合

$$\Gamma'_{(Z_{\text{ref}})} \triangleq \frac{Z'_{\text{ref}} - Z_{\text{ref}}}{Z'_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}}} \cdot \mathbf{1}_n$$

$$\begin{aligned} S'_{(Z'_{\text{ref}})} &= \{(1_n - S)^{-1}(S - \Gamma')(1_n - S\Gamma')^{-1}(1_n - S)\}_{(Z_{\text{ref}})} \\ &= \{(1_n - \Gamma')^{-1}(S - \Gamma')(1_n - \Gamma'S)^{-1}(1_n - \Gamma')\}_{(Z_{\text{ref}})} \end{aligned}$$

- Γ' が対角行列なので、下の式の方が計算しやすい。

▼例

- $S_{(50\Omega)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $Z'_{\text{ref}} = 25\Omega$ に変更する。

- $\Gamma'_{(50\Omega)} \triangleq \frac{25 - 50}{25 + 50} \cdot \mathbf{1}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{1}_2 - \Gamma' = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \mathbf{1}_2$

$$(\mathbf{1}_2 - \Gamma')^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \cdot \mathbf{1}_2$$

$$S - \Gamma' = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma'S = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1}_2 - \Gamma'S = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{1}_2 - \Gamma'S)^{-1} = \frac{9}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\begin{aligned} \therefore S'_{(Z'_{\text{ref}})} &= \frac{4}{3} \cdot \mathbf{1}_2 \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix} \frac{9}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \frac{3}{4} \cdot \mathbf{1}_2 \\ &= \frac{9}{8} \begin{bmatrix} 0 & 8/9 \\ 8/9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$

▶例

▶例

▼ポートごとに基準インピーダンスが違う場合

- $Z_{\text{ref}} = \text{diag}(Z_{\text{ref}1}, Z_{\text{ref}2}, \dots, Z_{\text{ref}n})$

$$Z'_{\text{ref}} = \text{diag}(Z'_{\text{ref}1}, Z'_{\text{ref}2}, \dots, Z'_{\text{ref}n})$$

$$S'_{(Z'_{\text{ref}})} = U'U^{-1} \{(1 - S)^{-1}(S - \Gamma')(1 - S\Gamma')^{-1}(1 - S)\}_{(Z_{\text{ref}})} UU'^{-1}$$

④ Uは規格化係数行列

• $\Gamma'_{(Z_{\text{ref}})} \triangleq U(Z'_{\text{ref}} - Z_{\text{ref}})(Z'_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}})^{-1}U^{-1}$



S行列の種類のみまとめ（一般化S行列を除く）

▼電圧基準の場合の波

▼ポート i の波変数（進行波振幅）の定義

$$\begin{aligned}
 a_i &= U_i \frac{V_i + Z_{\text{ref}i} I_i}{2} \quad (\text{Incident wave}) \\
 b_i &= U_i \frac{V_i - Z_{\text{ref}i} I_i}{2} \quad (\text{Outgoing wave})
 \end{aligned}$$

• $Z_{\text{ref}i}$ は基準インピーダンス, U_i は規格化係数

▼ポートの電圧と電流

$$\begin{aligned}
 V_i &= \frac{a_i + b_i}{U_i} \\
 I_i &= \frac{a_i - b_i}{U_i Z_{\text{ref}i}}
 \end{aligned}$$

◎ ▼ポート i の規格化係数 U_i は以下のように定義される

波の種類	a_i, b_i の次元	U_i	U_i の次元
Voltage waves	V	1	無次元
Current waves (その2)	A	$1/Z_{\text{ref}i}$	Ω^{-1}
Normalized waves	\sqrt{W}	$1/\sqrt{R_{\text{ref}i}}$	$\Omega^{-1/2}$
		$e^{j\varphi_i} \sqrt{\Re(Z_{\text{ref}i})}/ Z_{\text{ref}i} $	
		$1/Z_{\text{ref}i}^{1/2}$	

▶ 必要に応じて $\varphi_i \neq 0$ として位相回転を与えることがある

◎ ▼注意： $Z_{\text{ref}i}$ が複素数の場合の power waves（後述）は、上の式では表せない。

$$\begin{aligned}
 a_{pi} &= \frac{1}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}i})}} \frac{V_i + Z_{\text{ref}i} I_i}{2} \\
 b_{pi} &= \frac{1}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}i})}} \frac{V_i - Z_{\text{ref}i}^* I_i}{2}
 \end{aligned}$$

▼電流基準の場合の波

▼進行波の定義

- $$a_i = U_i \frac{I_i + Y_{\text{ref}i} V_i}{2} \quad (\text{Incident wave})$$

$$b_i = U_i \frac{I_i - Y_{\text{ref}i} V_i}{2} \quad (\text{Outgoing wave})$$

- $Y_{\text{ref}i}$ は基準アドミッタンス, U_i は規格化係数

▼ ポートの電圧と電流

- $$V_i = \frac{a_i - b_i}{U_i Y_{\text{ref}i}}$$

$$I_i = \frac{a_i + b_i}{U_i}$$

▼ 規格化係数

波の種類	a_i, b_i の次元	U_i	U_i の次元
Current waves (その1)	A	1	無次元

ポートごとに基準インピーダンスが異なる場合

▽基準インピーダンスはポートごとに違っていてもいい

▽行列要素はポート i を $Z_{\text{ref}i}$ で終端して求める。

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = S_{(Z_{\text{ref}1}, Z_{\text{ref}2})} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{Z_2=Z_{\text{ref}2}}$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{Z_2=Z_{\text{ref}2}}$$

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{Z_1=Z_{\text{ref}1}}$$

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{Z_1=Z_{\text{ref}1}}$$

▽基準インピーダンス行列

○各ポートの基準インピーダンスを対角に並べた「基準インピーダンス行列」を使ってS行列を定義する

○S行列は $S_{(Z_{\text{ref}})}$ と書く

$$Z_{\text{ref}} \triangleq \begin{bmatrix} Z_{\text{ref}1} & & & \\ & Z_{\text{ref}2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_{\text{ref}n} \end{bmatrix}$$

▽波変数（進行波振幅）ベクトル

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^T = \frac{1}{2} \mathbf{U} (\mathbf{v} + \mathbf{Z}_{\text{ref}} \mathbf{i})$$

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T = \frac{1}{2} \mathbf{U} (\mathbf{v} - \mathbf{Z}_{\text{ref}} \mathbf{i})$$

○Uは規格化係数行列。定義は下

▽ポート電圧ベクトルとポート電流ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_n]^T \\ \mathbf{i} &= [I_1 \quad I_2 \quad \cdots \quad I_n]^T \end{aligned}$$

◎規格化係数行列

$$\mathbf{U} \triangleq \begin{bmatrix} U_1 & & & \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_n \end{bmatrix}$$

▽1. 電圧S行列の場合

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{単位行列})$$

●これが最もシンプル

▽2. 電流S行列（その1）の場合

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/Z_{\text{ref}1} & & & \\ & 1/Z_{\text{ref}2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/Z_{\text{ref}n} \end{bmatrix}$$

●これはほとんど使われない

▽3. 規格化された進行波のS行列の場合

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{R_{\text{ref}1}} & & & \\ & 1/\sqrt{R_{\text{ref}2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sqrt{R_{\text{ref}n}} \end{bmatrix}$$

●これが最もよく使われてる

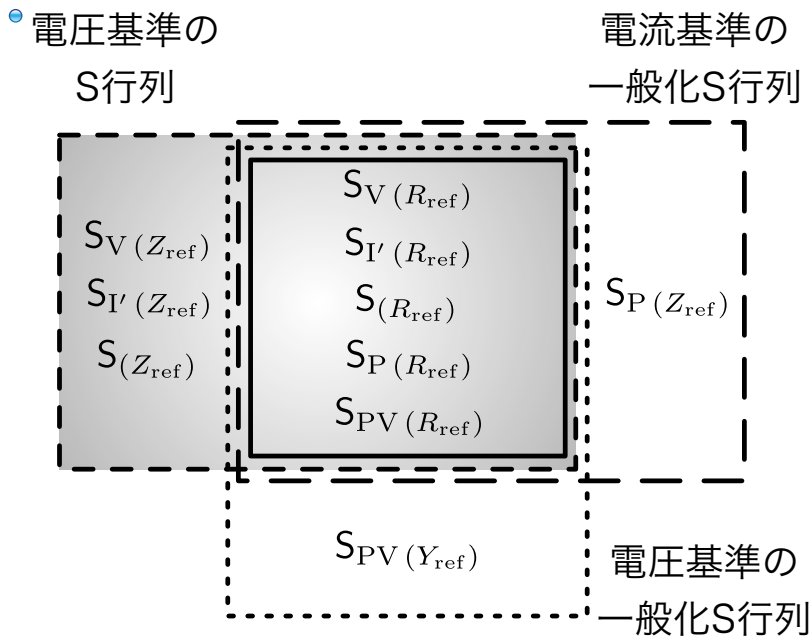
$$U = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1} \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}}{|Z_{\text{ref}1}|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j\varphi_2} \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{|Z_{\text{ref}2}|} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{j\varphi_n} \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}n})}}{|Z_{\text{ref}n}|} \end{bmatrix}$$

▶ Z_{ref} が複素数ならこうする

▼ S行列

$$b = Sa$$

▼ すべてのポートの基準インピーダンスが等しい場合のS行列の包含関係



◎ ▼ ポートごとに基準インピーダンスが違くと縮重が解ける

$$S_{(Z_{\text{ref}})} \rightarrow S_{(Z_{\text{ref}})}$$

▼ 例：S行列の21成分

▼ 1. 電圧S行列

$$a_i = V_i^+ = \frac{V_i + Z_{\text{ref}i} I_i}{2}$$

$$b_j = V_j^- = \frac{V_j - Z_{\text{ref}j} I_j}{2}$$

$$\blacktriangleright S_{V21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{V_2 - Z_{\text{ref}2}I_2}{V_1 + Z_{\text{ref}1}I_1} = \frac{2V_2}{V_1 + Z_{\text{ref}1}I_1}$$

▼2. 電流S行列 (その2)

$$\bullet a_i = I_i'^+ = \frac{V_i + Z_{\text{ref}i}I_i}{2Z_{\text{ref}i}} = \frac{I_i + G_{\text{ref}i}V_i}{2}$$

$$b_j = I_j'^- = \frac{V_j - Z_{\text{ref}j}I_j}{2Z_{\text{ref}j}} = -\frac{I_j - G_{\text{ref}j}V_j}{2}$$

$$\bullet S_{I'21} = \frac{I_2'^-}{I_1'^+} = \frac{Z_{\text{ref}1}}{Z_{\text{ref}2}} \cdot \frac{V_2 - Z_{\text{ref}2}I_2}{V_1 + Z_{\text{ref}1}I_1}$$

$$= \frac{Z_{\text{ref}1}}{Z_{\text{ref}2}} S_{V21} \neq S_{V21}$$

▼3. 規格化した波のS行列

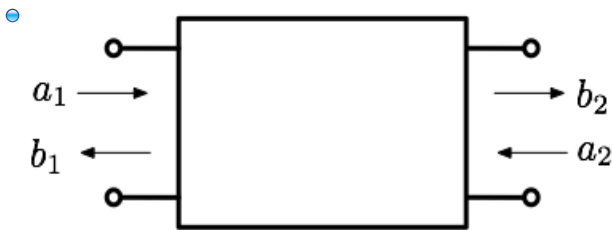
$$\bullet a_i = \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}i})}}{|Z_{\text{ref}i}|} \frac{V_i + Z_{\text{ref}i}I_i}{2}$$

$$b_j = \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}j})}}{|Z_{\text{ref}j}|} \frac{V_j - Z_{\text{ref}j}I_j}{2}$$

$$\bullet S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \sqrt{\frac{\Re(Z_{\text{ref}2})}{\Re(Z_{\text{ref}1})} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|}} \frac{V_2 - Z_{\text{ref}2}I_2}{V_1 + Z_{\text{ref}1}I_1}$$

$$= \sqrt{\frac{\Re(Z_{\text{ref}2})}{\Re(Z_{\text{ref}1})} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|}} S_{V21} \neq S_{V21}$$

T行列とR行列



▼ T行列

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = T_{(Z_{\text{ref}})} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

量子力学や電磁気学で使われる「transfer matrix」と同じ定義

$$T_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22} \end{bmatrix}$$

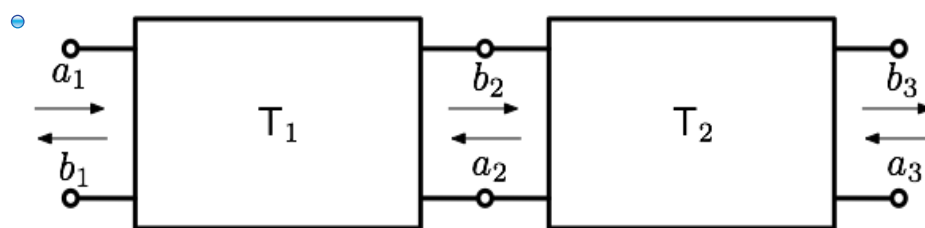
▼ 導出

$$\begin{aligned} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{だから} \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \therefore T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ 0 & S_{21} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bullet S_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{T_{11}} \begin{bmatrix} T_{21} & T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \\ 1 & -T_{12} \end{bmatrix}$$

▼ 縦続接続の計算に便利



$$\bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = T_1 T_2 \begin{bmatrix} b_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

- これが成り立つためには、接続面の基準インピーダンスが一致していなければならない

▼呼称

- Chain scattering matrix (Gonzalez)
- Scattering transfer matrix (Gonzalez)
- Transfer scattering matrix (Mavaddat)
- Wave-amplitude transmission matrix (Collin)

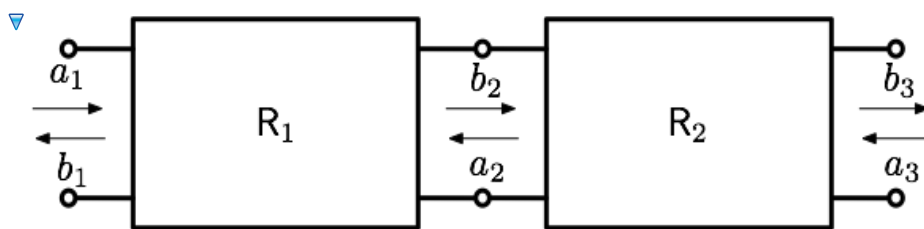
▼R行列

- T行列と同じく縦続接続の計算に利用される
- R行列をT行列と称することも多い

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = R_{(Z_{\text{ref}})} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$R_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22} & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{R_{22}} \begin{bmatrix} R_{12} & R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} \\ 1 & -R_{21} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = R_1 R_2 \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- これが成り立つためには、接続面の基準インピーダンスが一致していなければならない

▼呼称

- Wave cascading matrix (NIST)
- Chain scattering matrix (Keysight のT行列)

▼T行列とR行列との関係

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{22} & T_{21} \\ T_{12} & T_{11} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{22} & R_{21} \\ R_{12} & R_{11} \end{bmatrix}$$

- 行と列が入れ替わっている

▼導出

- 波ベクトルの行を入れ替える

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \mathsf{T} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

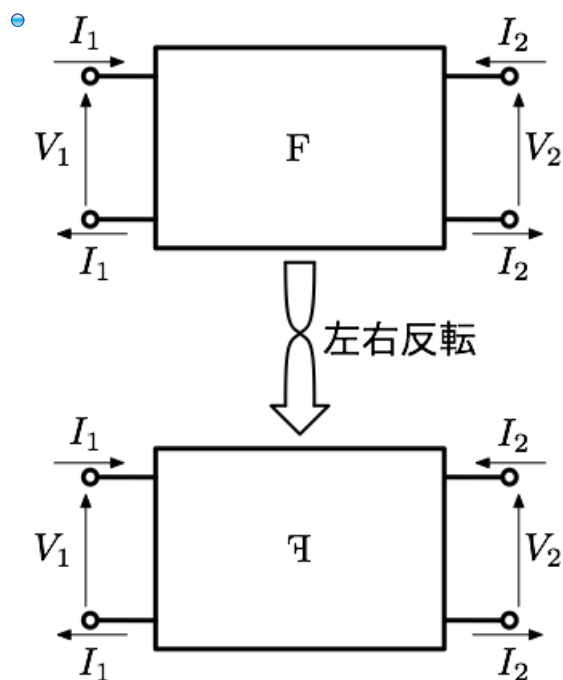
$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \mathsf{T} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathsf{R} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

▼どちらをT行列と呼び、どちらをR行列と呼んでもいいが、互いにこういう関係にあるということが重要

- MATLAB の「T行列」は本稿のT行列
- ADS の「T行列」は本稿のR行列
- Cascade de-embedding の定式化でR行列とT行列を併用することがある

▼T行列の諸性質

▼左右入れ替え（裏返し回路）



- $\mathsf{T}_F = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ とする.

$$\begin{aligned} \nabla \overline{T}_F &\triangleq T_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}} \begin{bmatrix} T_{11} & -T_{21} \\ -T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T_F^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= R_F^{-1} \end{aligned}$$

• Overline は左右反転操作を表す

▽導出1

$$\bullet S_F = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \text{ とすると } S_{\mathfrak{F}} = \begin{bmatrix} S_{22} & S_{21} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}.$$

$$\bullet T_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{S_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{11} \\ S_{22} & S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bullet S_F = \frac{1}{T_{11}} \begin{bmatrix} T_{21} & T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \\ 1 & -T_{12} \end{bmatrix} \text{ だから}$$

$$T_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}} \begin{bmatrix} T_{11} & -T_{21} \\ -T_{12} & T_{22} \end{bmatrix}$$

▽導出2

$$\bullet T_{\mathfrak{F}} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = T_F \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ だから}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = T_{\mathfrak{F}} \begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11}b_1 + T'_{12}a_1 \\ T'_{21}b_1 + T'_{22}a_1 \end{bmatrix}$$

• 行を入れ替える。

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{21}b_1 + T'_{22}a_1 \\ T'_{11}b_1 + T'_{12}a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{22} & T'_{21} \\ T'_{12} & T'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{22} & T'_{21} \\ T'_{12} & T'_{11} \end{bmatrix} T_F \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} T'_{22} & T'_{21} \\ T'_{12} & T'_{11} \end{bmatrix} = T_F^{-1} = \frac{1}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}} \begin{bmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{bmatrix}$$

$$\bullet T_{\mathfrak{F}} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}} \begin{bmatrix} T_{11} & -T_{21} \\ -T_{12} & T_{22} \end{bmatrix}$$

▽Reciprocal (可逆) なら

$$\bullet T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = \frac{S_{12}}{S_{21}} = 1$$

▽R行列の諸性質

▽左右入れ替え (裏返し回路)

$$\bullet R_F = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} \overline{R}_F &\triangleq R_{\overline{F}} = \frac{1}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{21} \\ -R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R_F^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= T_F^{-1} \end{aligned}$$

▼ 導出

$$\begin{aligned} R_{\overline{F}} &= \begin{bmatrix} T_{\overline{F}22} & T_{\overline{F}21} \\ T_{\overline{F}12} & T_{\overline{F}11} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}} \begin{bmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{21} \\ -R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

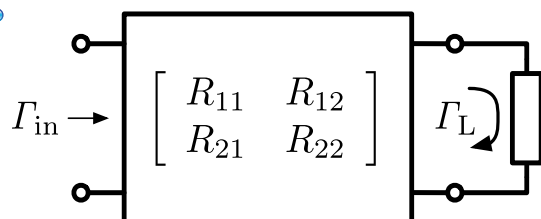
▼ Reciprocal (可逆) なら

$$R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} = \frac{S_{12}}{S_{21}} = 1$$

▼ 反射係数の変換

- F行列の行列要素はインピーダンス変換の式にそのまま現れる
- 同様に，R行列（またはT行列）の行列要素は，2-portによる反射係数の変換の式に現れる

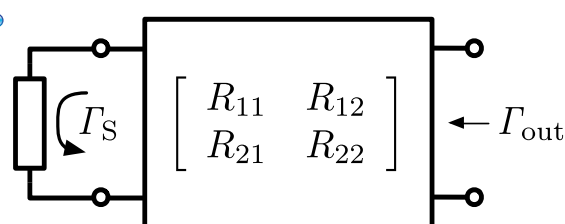
▼ ポート2が Γ_L で終端されている時のポート1の反射係数 Γ_{in}



$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= \frac{R_{11}\Gamma_L + R_{12}}{R_{21}\Gamma_L + R_{22}} = \frac{T_{22}\Gamma_L + T_{21}}{T_{12}\Gamma_L + T_{11}} \\ &= S_{11} + \frac{S_{12}\Gamma_L S_{21}}{1 - S_{22}\Gamma_L} \end{aligned}$$

- 分子に「 $R_{11} R_{12}$ 」，分母に「 $R_{21} R_{22}$ 」ときれいに並んでいることに注目！

▼ ポート1が Γ_S で終端されている時のポート2の反射係数 Γ_{out}



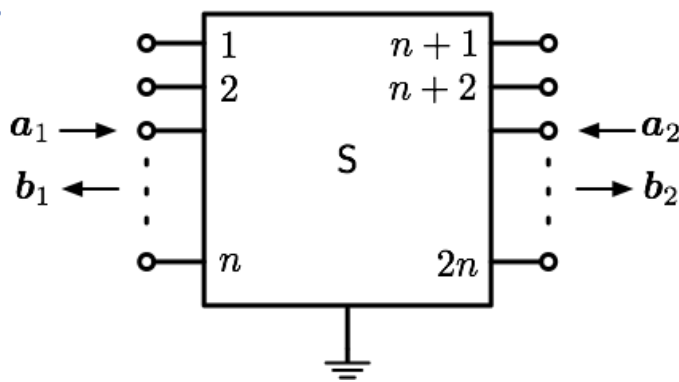
$$\Gamma_{\text{out}} = \frac{R_{11}\Gamma_S - R_{21}}{-R_{12}\Gamma_S + R_{22}} = \frac{T_{22}\Gamma_S - T_{12}}{-T_{21}\Gamma_S + T_{11}}$$

$$= S_{22} + \frac{S_{21}\Gamma_S S_{12}}{1 - S_{22}\Gamma_S}$$

- 導出：左右反転した2ポートを考えればいい

2nポートの場合

- 2nポートのポート番号の振り方は、目的次第で使い分けるといい
- ポートをn個ずつ束にして縦続接続したい場合、下記の番号振りが便利



- 以下では $2n \times 2n$ の T, R, S を $n \times n$ の小行列に分けて書く

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{21}^{-1} & -S_{21}^{-1}S_{22} \\ S_{11}S_{21}^{-1} & S_{12} - S_{11}S_{21}^{-1}S_{22} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} - S_{11}S_{21}^{-1}S_{22} & S_{11}S_{21}^{-1} \\ -S_{21}^{-1}S_{22} & S_{21}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{21}T_{11}^{-1} & T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12} \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{12}R_{22}^{-1} & R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21} \\ R_{22}^{-1} & -R_{22}^{-1}R_{21} \end{bmatrix}$$

映像パラメータ (image parameters)

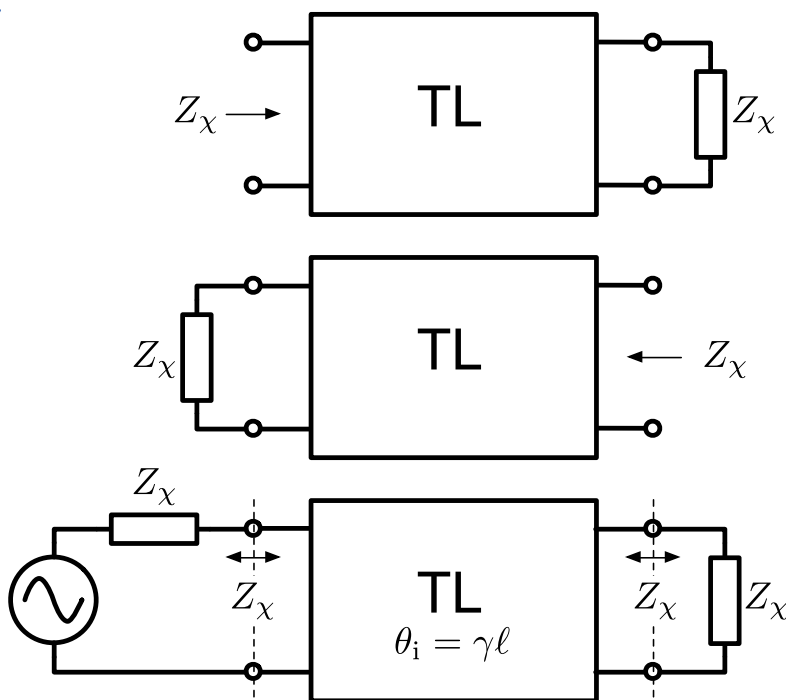
- 可逆 (reciprocal) な2ポートの映像パラメータは、映像インピーダンス Z_{i1} , Z_{i2} と映像伝送量 θ_i とからなる

まず長さ l の伝送線路を考える

- 伝送線路を特徴づけるパラメータは、特性インピーダンス Z_x と伝搬定数 γ

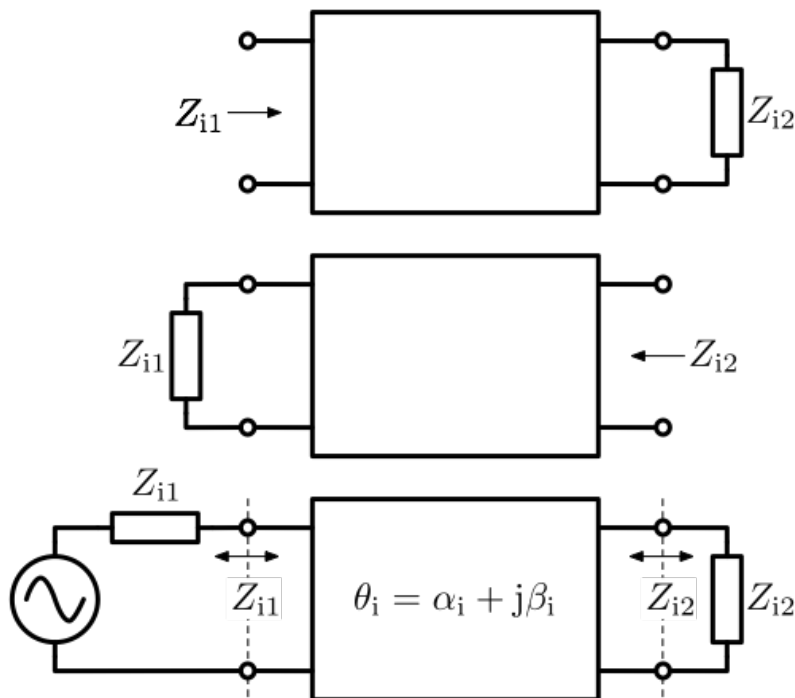
- $Z_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} Z_x & 0 \\ 0 & Z_x \end{bmatrix}$ を基準インピーダンス行列としたときの

伝送線路の S 行列は $S_{(Z_{\text{ref}})} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{bmatrix}$.



- ポート2を Z_x で終端したとき、ポート1の入力インピーダンスは Z_x
- ポート1を Z_x で終端したとき、ポート2の入力インピーダンスは Z_x
- 信号源インピーダンスと負荷インピーダンスが Z_x のとき、入射した進行波の減衰と位相回転が θ_i
- このとき、この2ポート (長さ l の伝送線路) の映像インピーダンスは $Z_{i1} = Z_{i2} = Z_x$, 映像伝送量は $\theta_i = \gamma l$

映像パラメータは、上記を左右非対称 ($Z_{i1} \neq Z_{i2}$) の場合に拡張したもの



- ポート2を Z_{i2} で終端したとき、ポート1の入力インピーダンスが Z_{i1}
- ▼ ポート1を Z_{i1} で終端したとき、ポート2の入力インピーダンスが Z_{i2}
 - つまり、映像インピーダンスとは、各ポートの入力インピーダンスと終端インピーダンスとが等しくなるような、終端インピーダンスのペア
- ▼ 信号源インピーダンスが Z_{i1} 、負荷インピーダンスが Z_{i2} のとき、減衰と位相回転を表す複素数が θ_i
 - θ_i の実部が減衰
 - θ_i の虚部が位相回転
- 長さ l の伝送線路を Z_x と γl とで特徴づけることができるのと同様、可逆 (reciprocal) な2ポートは Z_{i1} 、 Z_{i2} 、 θ_i で表せる

▼ 2ポートのABCD行列、Y行列、Z行列を用いて映像パラメータを表すと

▼ 映像インピーダンス

$$Z_{i1} = \left(\frac{AB}{CD} \right)^{1/2} = \left(\frac{Z_{11}}{Y_{11}} \right)^{1/2}$$

$$Z_{i2} = \left(\frac{DB}{CA} \right)^{1/2} = \left(\frac{Z_{22}}{Y_{22}} \right)^{1/2}$$

- ふつうは $\Re(Z_{i1}) \geq 0$, $\Re(Z_{i2}) \geq 0$ をとる

▼ 導出

- 簡単のため可逆 ($AD - BC = 1$) の場合を考える.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

- $V_1 = AV_2 - BI_2$
 $I_1 = CV_2 - DI_2$

- $\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$

- $V_2 = DV_1 - BI_1$
 $I_2 = CV_1 - AI_1$

- ポート 2 に Z_{i2} をつなぐと $V_2 = -Z_{i2}I_2$.

このときポート 1 の入力インピーダンスが $Z_{i1} = V_1/I_1 = \frac{AZ_{i2} + B}{CZ_{i2} + D}$.

- 同様にポート 1 に Z_{i1} をつなぐと $V_1 = -Z_{i1}I_1$.

このときポート 2 の入力インピーダンスが $Z_{i2} = V_2/I_2 = \frac{DZ_{i1} + B}{CZ_{i1} + A}$.

以上の連立方程式を解けばいい.

▽ 映像伝送量 (伝統的な定義)

- $e^{\theta_i} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}$

◎ ▽ 映像パラメータとS行列の関係

- 映像インピーダンスで終端すると, 反射が0になる

- ▽ θ'_i を「映像伝送量」と定義したほうがS行列との対応はわかりやすい.

- $U_i = 1/\sqrt{Z_{\text{ref}i}}$ のとき $\theta'_i = \theta_i$ になる。

- $Z_{i1} = Z_{\text{ref}1} \left\{ \frac{[(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}][(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}]}{[(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}]} \right\}^{1/2}$

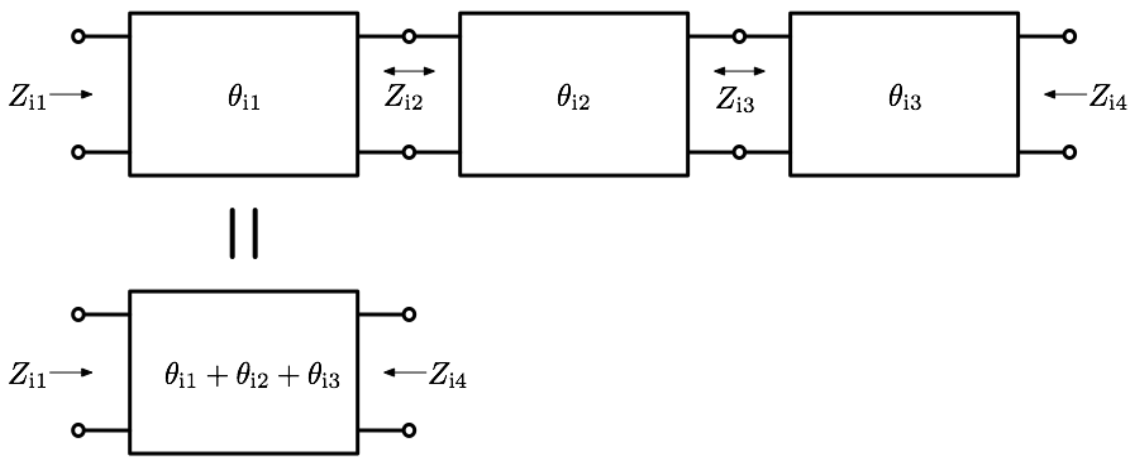
- $Z_{i2} = Z_{\text{ref}2} \left\{ \frac{[(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}][(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}]}{[(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}][(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}]} \right\}^{1/2}$

- $e^{\theta_i} = \frac{U_2}{U_1} \frac{Z_{\text{ref}2}}{Z_{\text{ref}1}} \frac{1}{2S_{21}} \left(\frac{\sqrt{[(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}]}}{\sqrt{[(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}]}} \right)$

- $\frac{U_2}{U_1} \frac{Z_{\text{ref}2}}{Z_{\text{ref}1}}$ が既知の定数 (たとえば 1) なら, 映像伝送量は S 行列の行列要素だけから決まる.

▽ イメージ接続

- 映像インピーダンスが一致したポート同士で縦続接続



▼可逆 (reciprocal) とは限らない2ポートの影像パラメータ

- 可逆でない2ポートを表現するには4つの複素数が必要

▼影像インピーダンスは可逆な場合と同じ

- $$Z_{i1} = \left(\frac{AB}{CD} \right)^{1/2} = \left(\frac{Z_{11}}{Y_{11}} \right)^{1/2}$$

- $$Z_{i2} = \left(\frac{DB}{CA} \right)^{1/2} = \left(\frac{Z_{22}}{Y_{22}} \right)^{1/2}$$

▼ $Z_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} Z_{i1} & 0 \\ 0 & Z_{i2} \end{bmatrix}$ とすると

$$S_{(Z_{\text{ref}})} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\theta'_{i12}} \\ e^{-\theta'_{i21}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{U_1}{U_2} \left(\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}} \right)^{1/2} e^{-\theta_{i12}} \\ \frac{U_2}{U_1} \left(\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}} \right)^{1/2} e^{-\theta_{i21}} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{表現 1})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{U_1}{U_2} \left(\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}} \right)^{1/2} k e^{-\theta_i} \\ \frac{U_2}{U_1} \left(\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}} \right)^{1/2} k^{-1} e^{-\theta_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{表現 2})$$

- $$T_{(Z_{\text{ref}})} = \begin{bmatrix} e^{\theta'_{i21}} & 0 \\ 0 & e^{-\theta'_{i12}} \end{bmatrix}$$

- $$R_{(Z_{\text{ref}})} = \begin{bmatrix} e^{-\theta'_{i12}} & 0 \\ 0 & e^{\theta'_{i21}} \end{bmatrix}$$

▼導出

- ABCD行列を影像パラメータで表し、それをS行列に変換すればいい

▼影像伝送量：表現1

- $$e^{\theta_{i21}} = \frac{\sqrt{AD} + \sqrt{BC}}{\frac{U_2 Z_{\text{ref2}}}{U_1 Z_{\text{ref1}}} \frac{1}{2S_{21}} \left(\sqrt{[(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}]} + \sqrt{[(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}]} \right)}$$
- $$e^{\theta_{i12}} = \frac{1}{\sqrt{AD} - \sqrt{BC}} = \frac{U_1 Z_{\text{ref1}}}{U_2 Z_{\text{ref2}}} 2S_{21} \left(\sqrt{[(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}]} - \sqrt{[(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}]} \right)^{-1}$$

▽ 影像伝送量：表現2

- $$k^2 \triangleq AD - BC = \frac{S_{12}}{S_{21}}$$
- $$e^{\theta_i} = \frac{\sqrt{AD} + \sqrt{BC}}{k} = \frac{U_2 Z_{\text{ref2}}}{U_1 Z_{\text{ref1}}} \frac{1}{2\sqrt{S_{12}S_{21}}} \left(\sqrt{[(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}]} + \sqrt{[(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}][(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}]} \right)$$

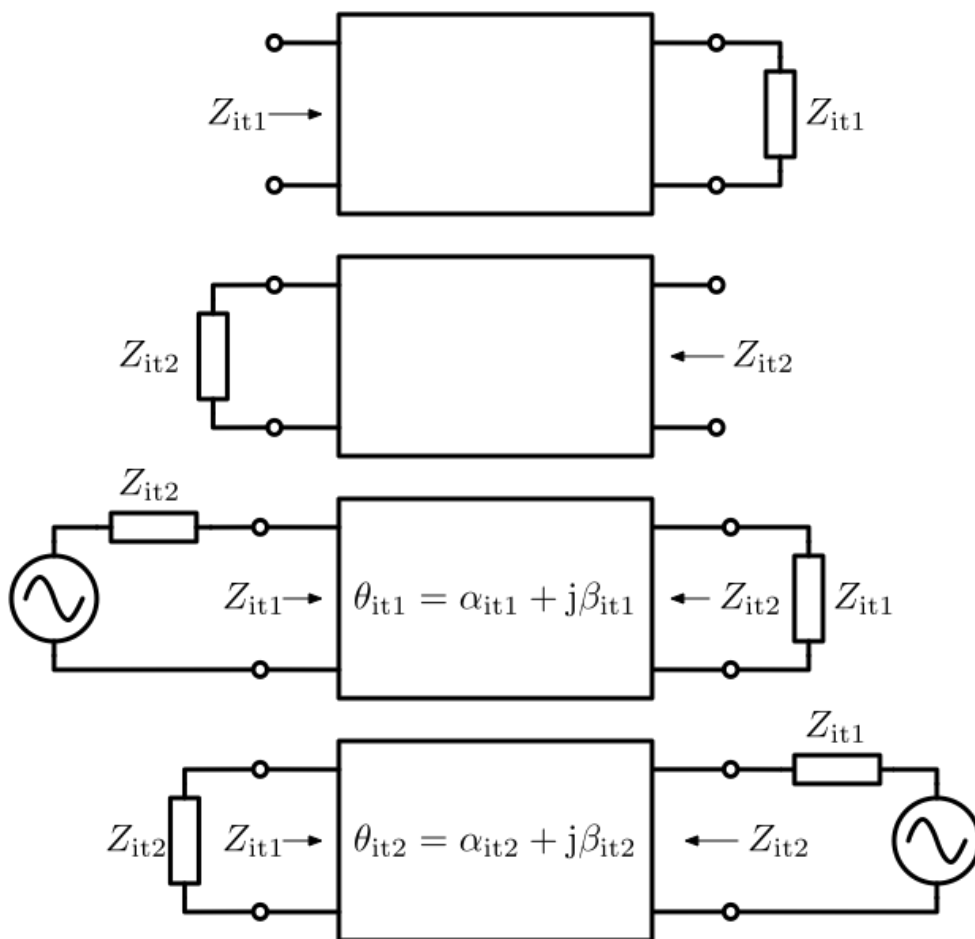
反復パラメータ (iterative parameters)

▼反復パラメータ

- 同じ2ポートをいくつも縦続接続する際に使うと便利
- 2-port の反復パラメータは「反復インピーダンス」と「反復伝送量」とからなる

▼反復インピーダンス

- ▼ 以下の条件を満たす Z_{it1} , Z_{it2} を「反復インピーダンス」と呼ぶ
 - 1. ポート2を Z_{it1} で終端したとき、ポート1の入力インピーダンスは Z_{it1}
 - 2. ポート1を Z_{it2} で終端したとき、ポート2の入力インピーダンスは Z_{it2}
- 反復インピーダンスは別名「ブロッホインピーダンス (Bloch impedance)」

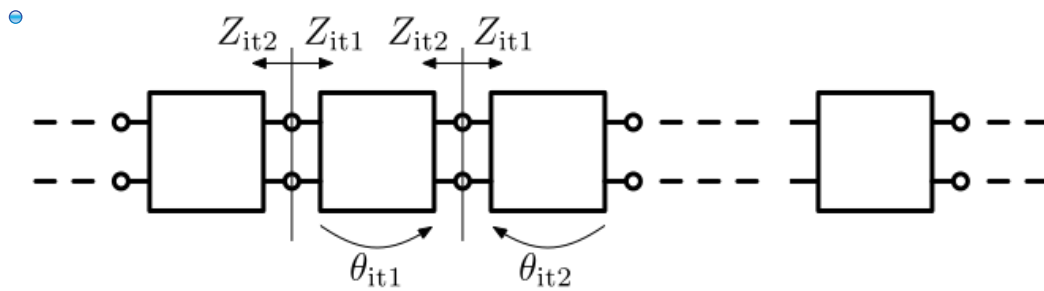


▼反復伝送量

- ▼ 両ポートを反復インピーダンスで終端したときの減衰と位相回転を表す複素数が反復伝送量 θ_{it}

- θ_{it} の実部が減衰
- θ_{it} の虚部が位相回転

▽ 反復パラメータの意味

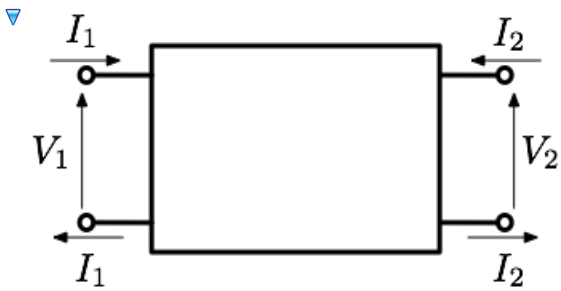


- 反復伝送量は, 1つの 2-port を無限に縦続接続したときの単位セルあたりの伝送量 (減衰と位相回転) を表す
- 反復インピーダンスは, 無限周期構造の入カインピーダンス
- 対称 2-port の反復パラメータは, 映像パラメータに一致する

電流・電圧にもとづく回路網の表現形式

• Y行列（アドミッタンス行列）	81
• Z行列（インピーダンス行列）	84
• H行列（ハイブリッドHパラメータ）	88
• G行列（ハイブリッドGパラメータ）	90
• ABCD行列（F行列）	92
• 回路行列が存在する／しない	98

Y行列 (アドミッタンス行列)



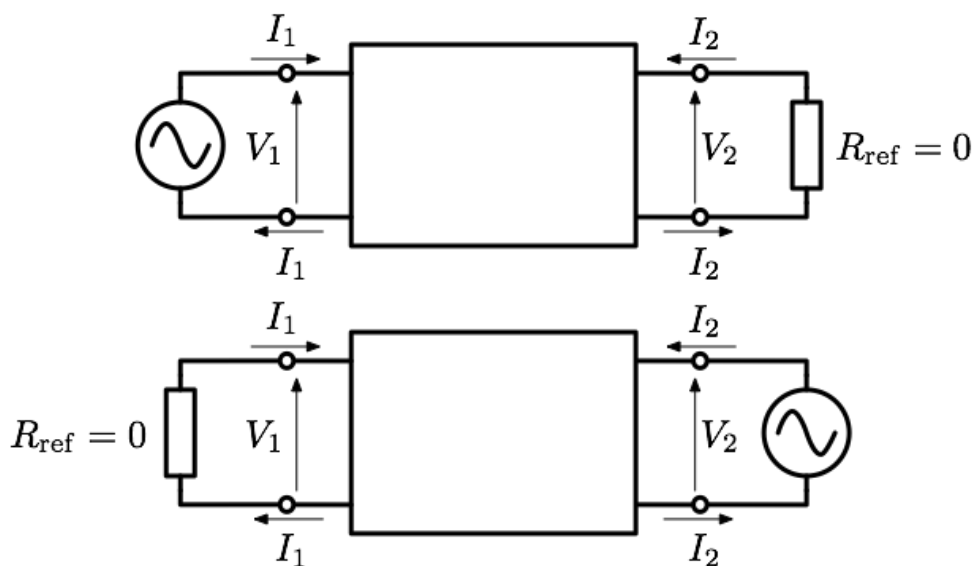
- 「Short-circuit admittance matrix」とも呼ぶ

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- $Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$ (Short-circuit driving-point input admittance)
- $Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$ (Short-circuit forward transmittance)
- $Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$ (Short-circuit reverse transmittance)
- $Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$ (Short-circuit driving-point output admittance)

ポートを短絡して行列要素を求める

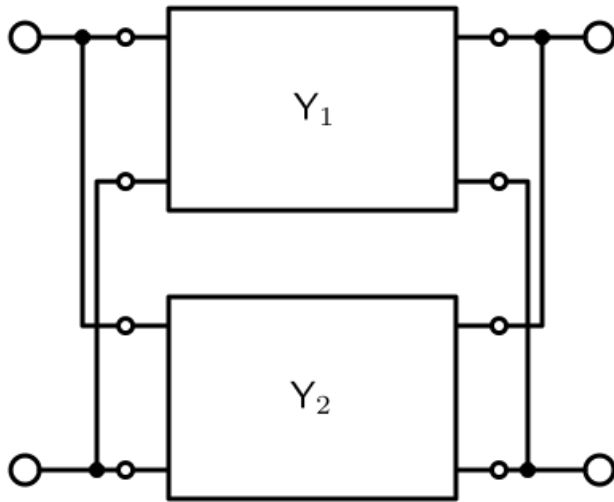
- 「その他のポート」は短絡してるので、 $R_{\text{ref}}=0$ なる基準抵抗で終端して行列要素を決めていることに相当する



- でも、値が $R_{\text{ref}}=0$ と決まってるから、わざわざ明示する必要がない

並列接続の計算に使う

$$\nabla Y = Y_1 + Y_2$$



② 2ポートの行列要素

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = \frac{1}{H_{11}} = \frac{D}{B} \\ &= \frac{1}{Z_{\text{ref1}}} \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\ &= \frac{1}{Z_{\text{ref1}}} \frac{R_{11} - R_{12} - R_{21} + R_{22}}{-R_{11} + R_{12} - R_{21} + R_{22}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{21} &= -\frac{Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = \frac{H_{21}}{H_{11}} = -\frac{G_{21}}{G_{22}} = -\frac{1}{B} \\ &= \frac{U_1}{U_2} \frac{1}{Z_{\text{ref2}}} \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\ &= \frac{U_1}{U_2} \frac{1}{Z_{\text{ref2}}} \frac{2}{R_{11} - R_{12} + R_{21} - R_{22}} \end{aligned}$$

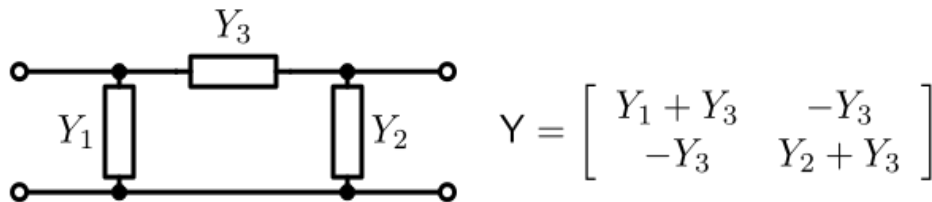
$$\begin{aligned} Y_{12} &= -\frac{Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = -\frac{H_{12}}{H_{11}} = \frac{G_{12}}{G_{22}} = \frac{BC - AD}{B} \\ &= \frac{U_2}{U_1} \frac{1}{Z_{\text{ref1}}} \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\ &= \frac{U_2}{U_1} \frac{1}{Z_{\text{ref1}}} \frac{-2(R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})}{-R_{11} + R_{12} - R_{21} + R_{22}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = \frac{1}{G_{22}} = \frac{A}{B} \\
 &= \frac{1}{Z_{\text{ref}2}} \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\
 &= \frac{1}{Z_{\text{ref}2}} \frac{R_{11} + R_{12} + R_{21} + R_{22}}{-R_{11} + R_{12} - R_{21} + R_{22}}
 \end{aligned}$$

U₁, U₂ は規格化係数で, S行列の定義に依存する



例



$$Y_3 = -Y_{21} (= -Y_{12})$$

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{21}$$

$$Y_2 = Y_{22} + Y_{21}$$

入出力アドミッタンス

$$Y_{\text{in}} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_L} \quad (Y_L \text{ は負荷アドミッタンス})$$

$$Y_{\text{out}} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_S} \quad (Y_S \text{ は信号源アドミッタンス})$$

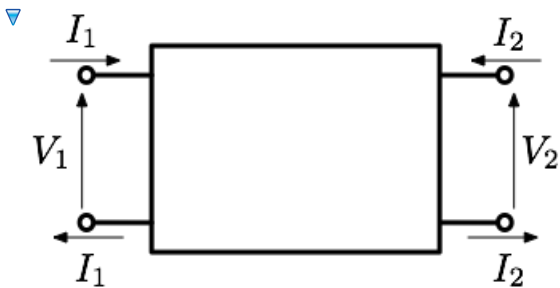
諸性質

$$Z = Y^{-1}$$

$$Y = Z_{\text{ref}}^{-1} [1_n + U^{-1}S_{(Z_{\text{ref}})}U]^{-1} [1_n - U^{-1}S_{(Z_{\text{ref}})}U]$$

$$S_{(Z_{\text{ref}})} = U(1_n - Z_{\text{ref}}Y)(1_n + Z_{\text{ref}}Y)^{-1}U^{-1}$$

Z行列 (インピーダンス行列)



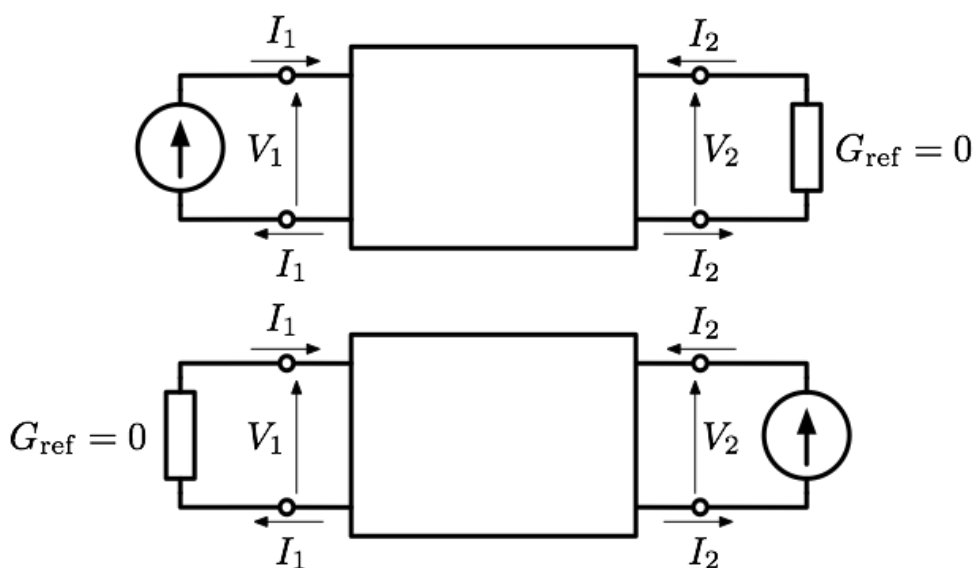
- 「Open-circuit impedance matrix」 とも呼ぶ

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- $Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$ (Open-circuit driving-point input impedance)
- $Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$ (Open-circuit forward transimpedance)
- $Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$ (Open-circuit reverse transimpedance)
- $Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$ (Open-circuit driving-point output impedance)

ポートを開放して行列要素を求める

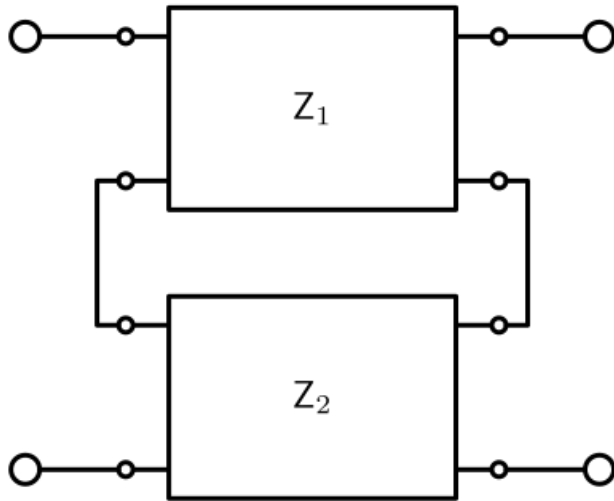
- 「その他のポート」は開放してるので、 $G_{\text{ref}}=0$ なる基準コンダクタンスで終端して行列要素を決めていることに相当する



- でも、値が $G_{\text{ref}}=0$ と決まってるから、わざわざ明示する必要がない

直列接続の計算に使う

$$\nabla Z = Z_1 + Z_2$$



② 2ポートの行列要素

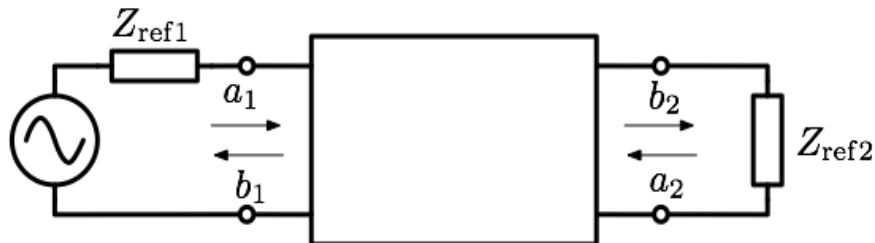
$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} = \frac{A}{C} \\ &= Z_{\text{ref}1} \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\ &= Z_{\text{ref}1} \frac{R_{11} + R_{12} + R_{21} + R_{22}}{-R_{11} - R_{12} + R_{21} + R_{22}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{21} &= -\frac{Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} = \frac{1}{C} \\ &= \frac{U_1}{U_2} Z_{\text{ref}1} \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\ &= \frac{U_1}{U_2} Z_{\text{ref}1} \frac{2}{-R_{11} - R_{12} + R_{21} + R_{22}} \end{aligned}$$

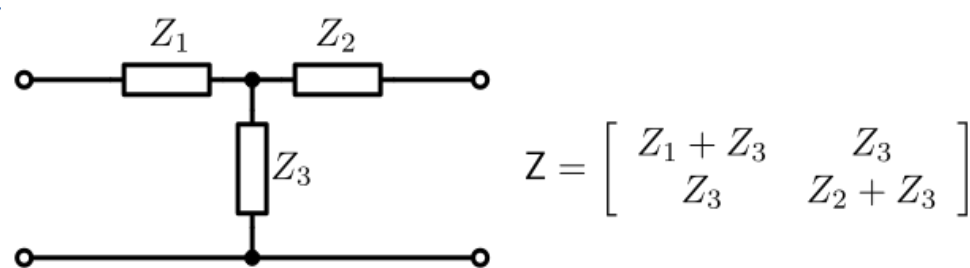
$$\begin{aligned} Z_{12} &= -\frac{Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} = \frac{AD - BC}{C} \\ &= \frac{U_2}{U_1} Z_{\text{ref}2} \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\ &= \frac{U_2}{U_1} Z_{\text{ref}2} \frac{2(R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})}{-R_{11} - R_{12} + R_{21} + R_{22}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{22} &= \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} = \frac{D}{C} \\
 &= Z_{\text{ref}2} \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}} \\
 &= Z_{\text{ref}2} \frac{R_{11} - R_{12} - R_{21} + R_{22}}{-R_{11} - R_{12} + R_{21} + R_{22}}
 \end{aligned}$$

U₁, U₂ は規格化係数で, S行列の定義に依存する



例



$$Z_3 = Z_{21} (= Z_{12})$$

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{21}$$

$$Z_2 = Z_{22} - Z_{21}$$

入出カインピーダンス

$$Z_{\text{in}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \quad (Z_L \text{ は負荷インピーダンス})$$

$$Z_{\text{out}} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_S} \quad (Z_S \text{ は信号源インピーダンス})$$

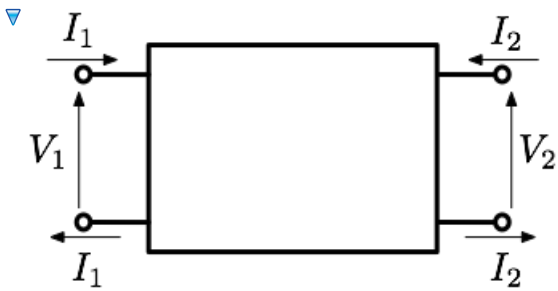
諸性質

$$Z = Y^{-1}$$

$$Z = [1_n - U^{-1}S_{(Z_{\text{ref}})}U]^{-1} [1_n + U^{-1}S_{(Z_{\text{ref}})}U] Z_{\text{ref}}$$

$$\begin{aligned} \bullet S_{(Z_{\text{ref}})} &= U(Z - Z_{\text{ref}})(Z + Z_{\text{ref}})^{-1}U^{-1} \\ &= U(ZZ_{\text{ref}}^{-1} - \mathbf{1}_n)(ZZ_{\text{ref}}^{-1} + \mathbf{1}_n)^{-1}U^{-1} \end{aligned}$$

H行列 (ハイブリッドHパラメータ)



▼

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

• $H_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}$ (Short-circuit driving-point impedance, インピーダンスの次元)

• $H_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0}$ (Short-circuit forward current gain, 無次元)

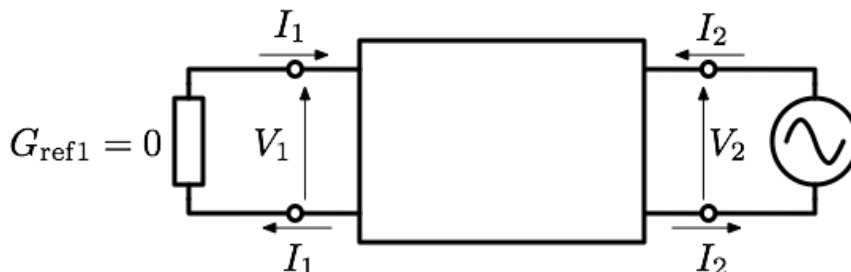
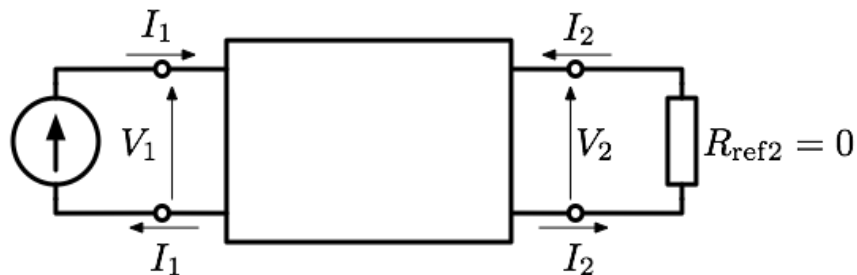
• $H_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0}$ (Open-circuit reverse voltage gain, 無次元)

• $H_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0}$ (Open-circuit driving-point admittance, アドミッタンスの次元)

▼ H行列の基準抵抗・基準コンダクタンス

• $G_{\text{ref1}} = 0, R_{\text{ref2}} = 0$

•



▼ トランジスタの f_T は, H_{21} が1になる周波数

• $|H_{21}(2\pi f_T)| = |H_{21}(\omega_T)| = 1$

▼ 2ポートの行列要素

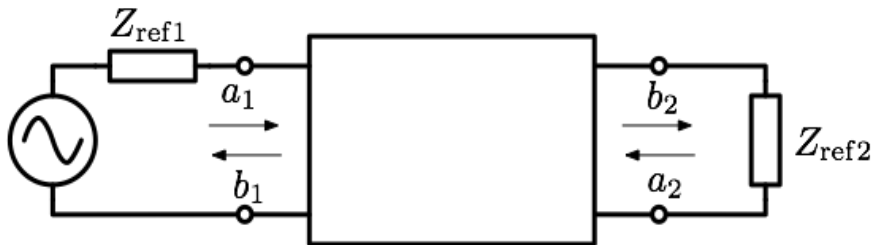
$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \frac{1}{Y_{11}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{G_{22}}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} = \frac{B}{D} \\
 &= Z_{\text{ref1}} \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{21} &= \frac{Y_{21}}{Y_{11}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -\frac{G_{21}}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} = -\frac{1}{D} \\
 &= \frac{U_1 Z_{\text{ref1}}}{U_2 Z_{\text{ref2}}} \frac{-2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{12} &= -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{G_{12}}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} = \frac{AD - BC}{D} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} \frac{2S_{12}}{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{22} &= \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{G_{11}}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} = \frac{C}{D} \\
 &= \frac{1}{Z_{\text{ref2}}} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}
 \end{aligned}$$

- U_1, U_2 は規格化係数で、S行列の定義に依存する



▼ 入出力ミッタンス

$$Z_{\text{in}} = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_L} \quad (Y_L \text{ は負荷アドミッタンス})$$

$$Y_{\text{out}} = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_S} \quad (Z_S \text{ は信号源インピーダンス})$$

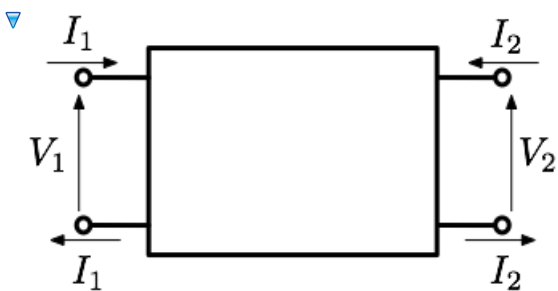
▼ 諸性質

$$H = G^{-1}$$

▼ Reciprocal (可逆) なら

$$H_{21} = -H_{12}$$

G行列 (ハイブリッドGパラメータ)



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- $G_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{I_2=0}$ (Open-circuit driving-point admittance, アドミッタンスの次元)

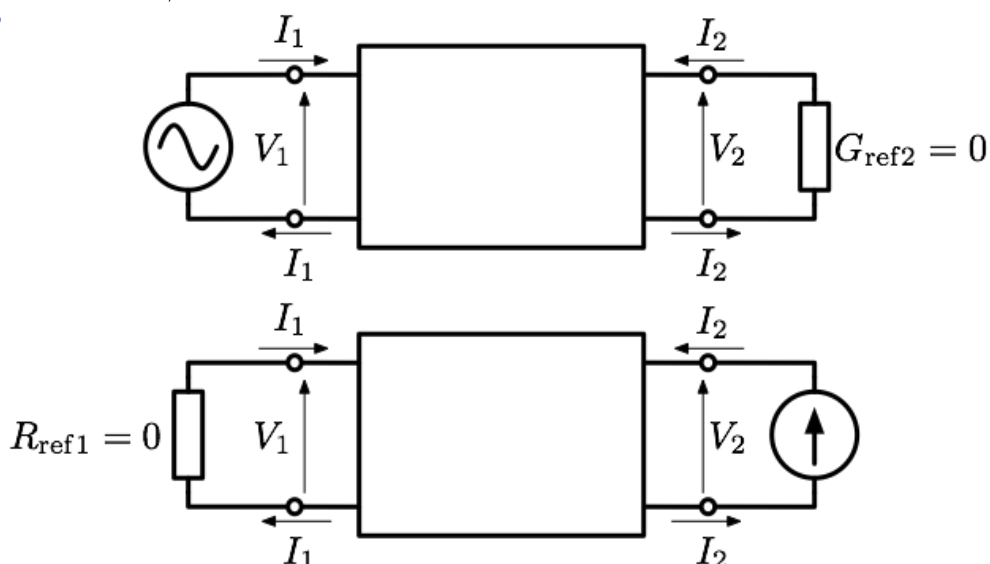
- $G_{21} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0}$ (Open-circuit forward voltage gain, 無次元)

- $G_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0}$ (Short-circuit reverse current gain, 無次元)

- $G_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0}$ (Short-circuit driving-point impedance, インピーダンスの次元)

▽ G行列の基準抵抗・基準コンダクタンス

- $R_{\text{ref1}} = 0, G_{\text{ref2}} = 0$



▽ 2ポートの行列要素

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{1}{Z_{11}} = \frac{H_{22}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}} = \frac{C}{A} \\ &= \frac{1}{Z_{\text{ref1}}} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{21} &= -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{11}} = -\frac{H_{21}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}} = -\frac{1}{A} \\ &= \frac{U_1}{U_2} \frac{2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{Y_{12}}{Y_{22}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} = -\frac{H_{12}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}} = -\frac{BC - AD}{A} \\ &= \frac{U_2}{U_1} \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{22} &= \frac{1}{Y_{22}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{H_{11}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}} = \frac{B}{A} \\ &= Z_{\text{ref2}} \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}} \end{aligned}$$

- U₁, U₂ は規格化係数で, S行列の定義に依存する



▼ 入出力ミッタンス

$$Y_{\text{in}} = G_{11} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{22} + Z_L} \quad (Z_L \text{ は負荷インピーダンス})$$

$$Z_{\text{out}} = G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11} + Y_S} \quad (Y_S \text{ は信号源アドミッタンス})$$

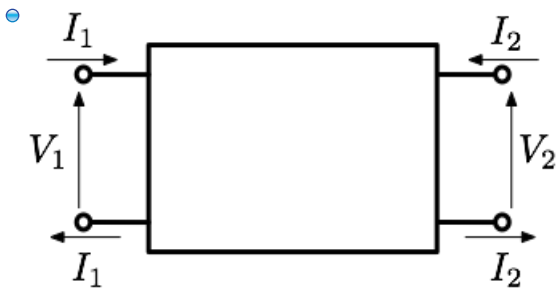
▼ 諸性質

$$G = H^{-1}$$

▼ Reciprocal (可逆) なら

$$G_{21} = -G_{12}$$

ABCD行列 (F行列)



- $$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

- $$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (\text{Open-circuit reverse voltage gain, 無次元})$$

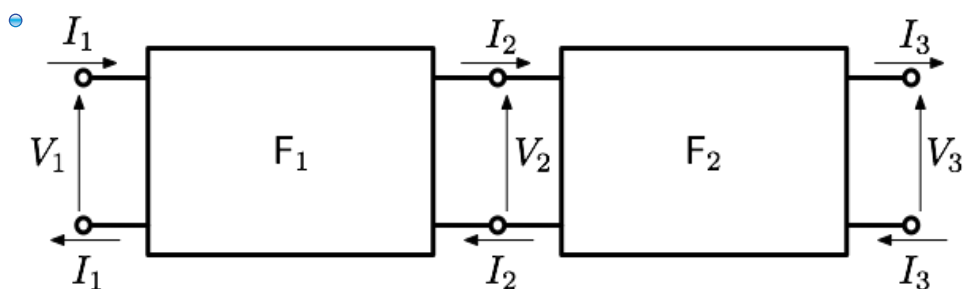
- $$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \quad (\text{Short-circuit reverse transimpedance, インピーダンスの次元})$$

- $$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (\text{Open-circuit reverse transadmittance, アドミッタンスの次元})$$

- $$D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \quad (\text{Short-circuit reverse current gain, 無次元})$$

縦列接続の計算に使う

- 電流はすべて右向きを正と定義したほうがわかりやすい



- $$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = F_1 \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = F_1 F_2 \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

2ポートの行列要素

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{1}{G_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} \frac{R_{11} + R_{12} + R_{21} + R_{22}}{2}
 \end{aligned}$$

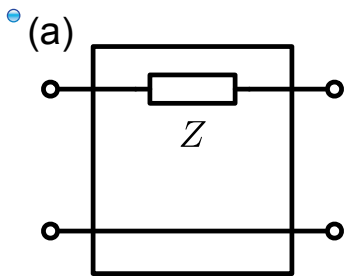
$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{1}{Y_{21}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} Z_{\text{ref}2} \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} Z_{\text{ref}2} \frac{-R_{11} + R_{12} - R_{21} + R_{22}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= -\frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}} = \frac{1}{Z_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} \frac{1}{Z_{\text{ref}1}} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} \frac{1}{Z_{\text{ref}1}} \frac{-R_{11} - R_{12} + R_{21} + R_{22}}{2}
 \end{aligned}$$

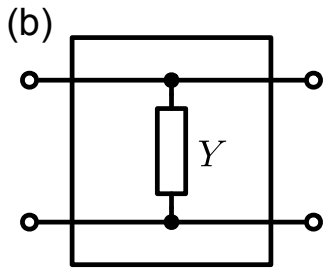
$$\begin{aligned}
 D &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} = -\frac{1}{H_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} \frac{Z_{\text{ref}2}}{Z_{\text{ref}1}} \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}} \\
 &= \frac{U_2}{U_1} \frac{Z_{\text{ref}2}}{Z_{\text{ref}1}} \frac{R_{11} - R_{12} - R_{21} + R_{22}}{2}
 \end{aligned}$$

- ◎ ● U_1, U_2 は規格化係数で, S行列の定義に依存する

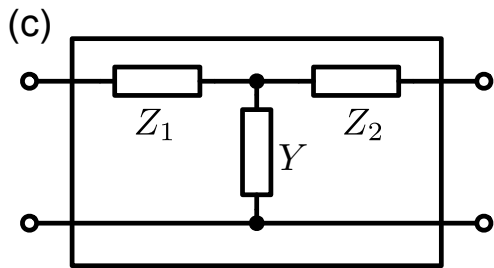
▼例



$$F = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

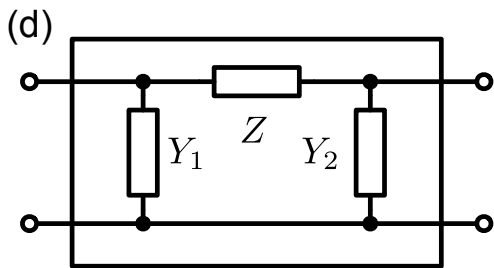


$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$



$$F = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + YZ_1 & Z_1 + Z_2 + YZ_1Z_2 \\ Y & 1 + YZ_2 \end{bmatrix}$$

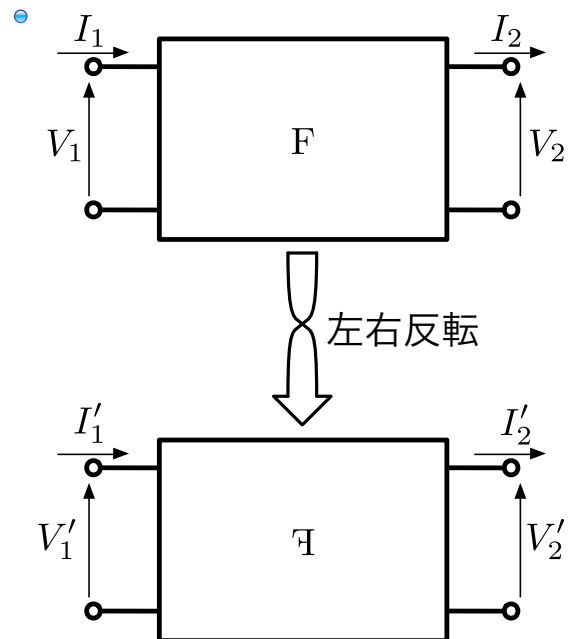


$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + Y_1Z & Z \\ Y_1 + Y_2 + Y_1Y_2Z & 1 + Y_2Z \end{bmatrix}$$

▼ 諸性質

▼ 左右入れ替え (裏返し回路)



- $F_F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ とする。

- ▼ $F_{\text{rev}} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} (\neq F_F^{-1})$
 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} F_F^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- ▼ 導出

- $F_{\text{rev}} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ とする。

- 左右反転後, $\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix}$ だとする。

- 反転前の変数との関係は $\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = F_{\text{rev}} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'V_1 - B'I_1 \\ C'V_1 - D'I_1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & -B' \\ -C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & -B' \\ -C' & D' \end{bmatrix} F_F \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} A' & -B' \\ -C' & D' \end{bmatrix} = F_F^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$

- $\therefore F_{\text{rev}} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix}$

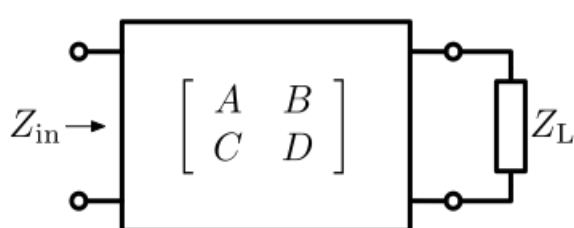
- ▼ 行列式

- $\det F = AD - BC = \frac{S_{12}}{S_{21}} = \frac{Z_{12}}{Z_{21}} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}}$

- ▼ Reciprocal (可逆) なら

- $\det F = 1$

- ▼ 2ポートによるインピーダンス変換



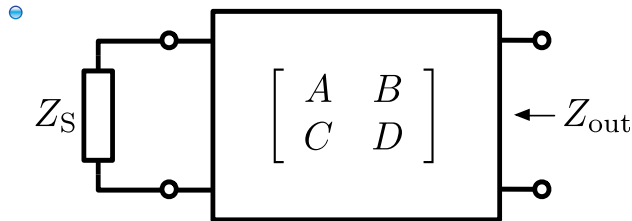
- ▼ インピーダンスが Z_L の1ポートを2ポートを介してのぞき込むと, 入力インピーダンスは次式で書ける

$$Z_{\text{in}} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

• 分子に「A B」、分母に「C D」ときれいに並んでいることに注目！

$$Y_{\text{in}} = \frac{CY_L + D}{AY_L + B}$$

▼ 左右逆の場合



$$Z_{\text{out}} = \frac{DZ_S - B}{-CZ_S + A}$$

$$Y_{\text{out}} = \frac{-CY_S + A}{DY_S - B}$$

▼ 映像パラメータとの関係

$$F = k \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}}} \cosh \theta_{\text{im}} & \sqrt{Z_{i1} Z_{i2}} \sinh \theta_{\text{im}} \\ \frac{\sinh \theta_{\text{im}}}{\sqrt{Z_{i1} Z_{i2}}} & \sqrt{\frac{Z_{i2}}{Z_{i1}}} \cosh \theta_{\text{im}} \end{bmatrix}$$

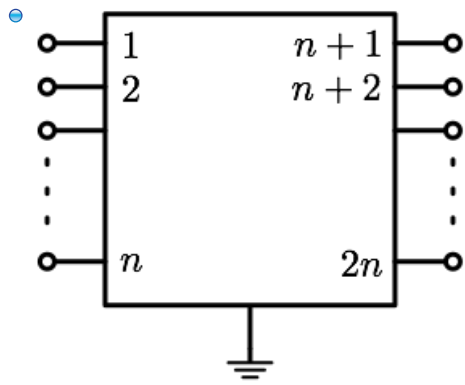
$$k^2 \triangleq \det F = AD - BC$$

▼ S行列への変換

$$S = \frac{1}{AZ_{\text{ref2}} + B + CZ_{\text{ref1}}Z_{\text{ref2}} + DZ_{\text{ref1}}} \times \begin{bmatrix} AZ_{\text{ref2}} + B - CZ_{\text{ref1}}Z_{\text{ref2}} - DZ_{\text{ref1}} & 2(AD - BC)Z_{\text{ref1}}U_1/U_2 \\ 2Z_{\text{ref2}}U_2/U_1 & -AZ_{\text{ref2}} + B - CZ_{\text{ref1}}Z_{\text{ref2}} + DZ_{\text{ref1}} \end{bmatrix}$$

▼ 2n ポートの場合

▼ ここではポートへの番号の振り方は以下のとおり



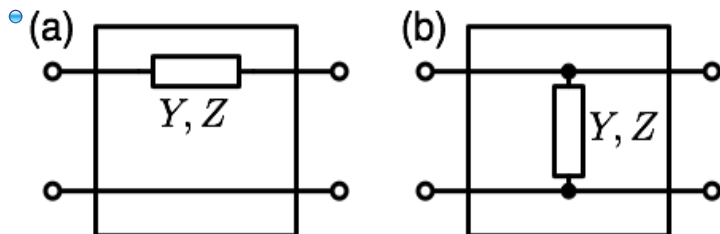
以下では $2n \times 2n$ の F , Y , Z を $n \times n$ の小行列に分けて書く

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Z_{11}Z_{21}^{-1} & -Y_{21}^{-1} \\ Z_{21}^{-1} & -Y_{11}Y_{21}^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

回路行列が存在する／しない

▽ Y行列・Z行列が存在する／しない

- 回路によってはY行列表現が存在しないとか、Z行列表現が存在しないとかいうことがある



	Y	Z	H	S	
(a)	$\begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} Z & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z + 2R_{\text{ref}}}$	$\begin{bmatrix} Z & 2R_{\text{ref}} \\ 2R_{\text{ref}} & Z \end{bmatrix}$
(b)	-	$\begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Y \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2Z + R_{\text{ref}}}$	$\begin{bmatrix} -R_{\text{ref}} & 2Z \\ 2Z & -R_{\text{ref}} \end{bmatrix}$

- Y行列かZ行列が存在しないのは、 R_{ref} か G_{ref} が0だから。その結果として電流か電圧が0になって、それが分母にきて発散する
- それに対してS行列の R_{ref} は常に有限値なので、発散は回避され、S行列表現は必ず存在する

▽ ABCD行列・T行列・R行列が存在する／しない

- ABCD行列 (F行列), T行列, R行列は縦続接続の計算に使うための行列だから、ポート1からポート2への伝達 (S_{21}) が0だと存在しない

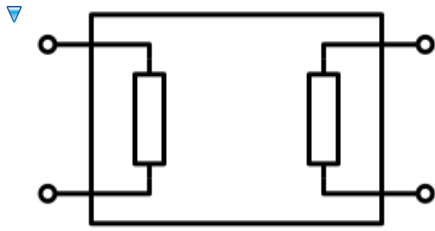
▽ 行列要素をS行列で書くと、 S_{21} が分母にきている

$$F = \frac{1}{2S_{21}} \begin{bmatrix} (1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21} & [(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}]Z_{\text{ref}} \\ [(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}]/Z_{\text{ref}} & (1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21} \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22} \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22} & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

- これらの行列の逆行列をとって、 S_{12} が分母にくるような行列表現も可能だが、あまり有用とはいえない



- こういう2ポートは「double 1-port」と呼ばれることがある
- Double 1-port は $S_{21}=S_{12}=0$ だから、F行列、T行列、R行列が存在しない

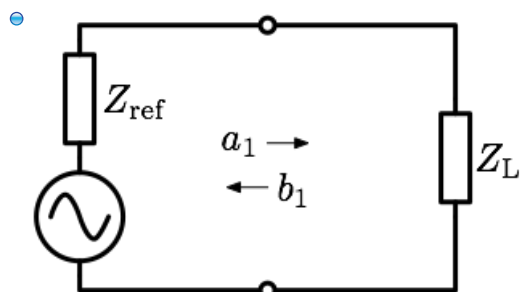
Power wavesと一般化S行列

• 電力波の反射係数	101
• 電力波と電圧波・電流波との関係	105
• パワーの反射係数 vs 電圧の反射係数	112
• 電力波に対する散乱行列（一般化S行列）	114
• 通常のS行列と一般化S行列の比較	116
• 共役影像パラメータ	118
• 一般化S行列のちょっと変わった性質	120
• 一般化S行列の変換式	123
• 各種S行列の使い分け	124

電力波の反射係数

▽ 1ポートに流れ込むパワー

- 媒質（伝送線路）なしで考える



$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} \Re(V_1 I_1^*) \\
 &= \frac{1}{2} \left[|a_1|^2 - |b_1|^2 - 2\Im(a_1^* b_1) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \right] \\
 &= \frac{1}{2} |a_1|^2 \left[1 - |S_{11}|^2 - 2\Im(S_{11}) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \right]
 \end{aligned}$$

- Z_{ref} が複素数だとパワーの式がややこしい
- $\Im(Z_{\text{ref}}) = 0$ なら

$$P_L = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

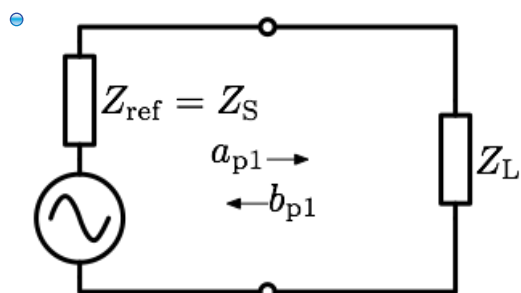
▽ 基準インピーダンスが複素数の場合でも、パワーが

$$P_L = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2)$$

という形で与えられたらうれしいんじゃないか (?)

- そのように「波」や「反射係数」を定義することも可能

▽ Kurokawaによるpower waves（電力波）の定義



$$a_{p1} = \frac{V_1 + Z_{\text{ref}} I_1}{2\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}$$

$$b_{p1} = \frac{V_1 - Z_{\text{ref}}^* I_1}{2\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}$$

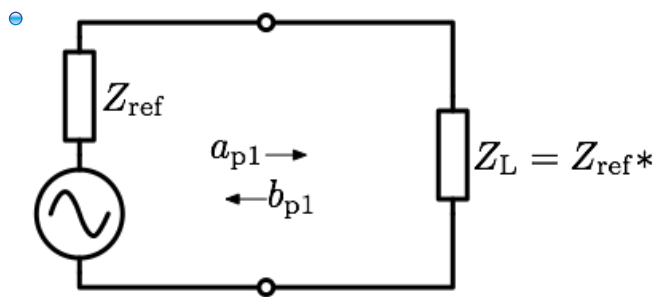
▽ 2乗すると電力の次元になる

- 名前は「電力波」だが、電力の次元ではない
- 前出の「 R_{ref} で規格化された波」は、特別なケースとして包含される

▽ 電力波に対する反射係数

$$S_{P11} \triangleq \frac{b_{p1}}{a_{p1}} = \frac{V_1 - Z_{\text{ref}}^* I_1}{V_1 + Z_{\text{ref}} I_1} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}^*}{Z_L + Z_{\text{ref}}}$$

▽ 信号源と負荷が共役整合して負荷に入るパワーが最大化されたときに、反射係数がゼロになる



▽ 負荷に流れ込む電力

$$P_L = \frac{1}{2} \Re(V_1 I_1^*) = \frac{1}{2} (|a_{p1}|^2 - |b_{p1}|^2) = \frac{1}{2} |a_{p1}|^2 (1 - |S_{P11}|^2)$$

▽ 導出

$$I_1 = \frac{2\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}(a_{p1} - b_{p1})}{Z_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}}^*} = \frac{a_{p1} - b_{p1}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}$$

$$V_1 = \frac{2\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}(Z_{\text{ref}}^* a_{p1} + Z_{\text{ref}} b_{p1})}{Z_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}}^*} = \frac{Z_{\text{ref}}^* a_{p1} + Z_{\text{ref}} b_{p1}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}$$

$$V_1 I_1^* = \frac{(Z_{\text{ref}}^* a_{p1} + Z_{\text{ref}} b_{p1})(a_{p1}^* - b_{p1}^*)}{\Re(Z_{\text{ref}})}$$

$$= \frac{Z_{\text{ref}}^* |a_{p1}|^2 - Z_{\text{ref}} |b_{p1}|^2 + Z_{\text{ref}} a_{p1}^* b_{p1} - Z_{\text{ref}}^* a_{p1} b_{p1}^*}{\Re(Z_{\text{ref}})}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \Re(V_1 I_1^*) &= \frac{V_1 I_1^* + V_1^* I_1}{2} \\
&= \frac{Z_{\text{ref}}^* |a_{p1}|^2 - Z_{\text{ref}} |b_{p1}|^2 + Z_{\text{ref}} a_{p1}^* b_{p1} - Z_{\text{ref}}^* a_{p1} b_{p1}^*}{2\Re(Z_{\text{ref}})} \\
&\quad + \frac{Z_{\text{ref}} |a_{p1}|^2 - Z_{\text{ref}}^* |b_{p1}|^2 + Z_{\text{ref}}^* a_{p1} b_{p1}^* - Z_{\text{ref}} a_{p1}^* b_{p1}}{2\Re(Z_{\text{ref}})} \\
&= \frac{(Z_{\text{ref}} + Z_{\text{ref}}^*) (|a_{p1}|^2 - |b_{p1}|^2)}{2\Re(Z_{\text{ref}})} \\
&= |a_{p1}|^2 - |b_{p1}|^2
\end{aligned}$$

▼ 負荷が passive なら必ず $|S_{P11}| \leq 1$ になる.

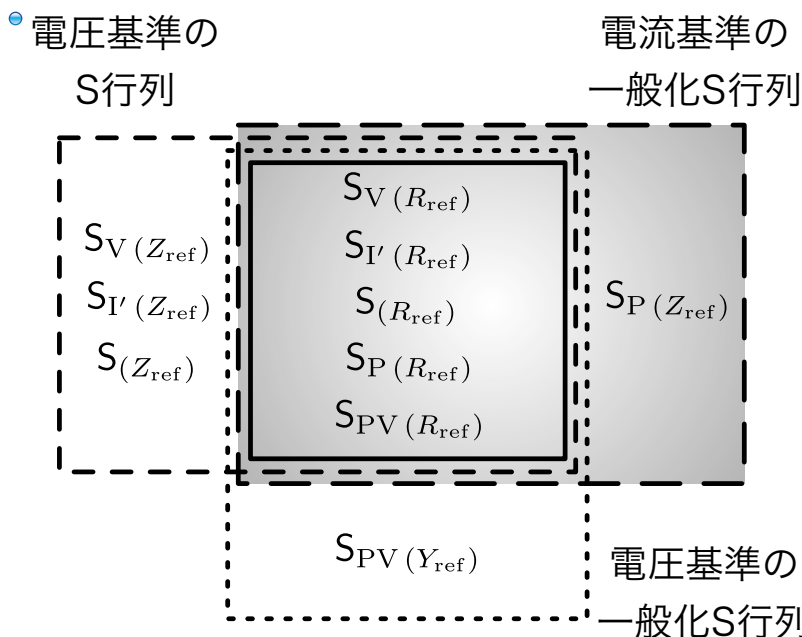
▼ 導出

• $R_L > 0, R_{\text{ref}} > 0$ である.

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright |S_{P11}|^2 &= \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}^*}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \cdot \frac{Z_L^* - Z_{\text{ref}}}{Z_L^* + Z_{\text{ref}}} \\
&= \frac{|Z_L|^2 + |Z_{\text{ref}}|^2 - 2\Re(Z_L Z_{\text{ref}})}{|Z_L|^2 + |Z_{\text{ref}}|^2 + 2\Re(Z_L Z_{\text{ref}}^*)} \\
&= \frac{|Z_L|^2 + |Z_{\text{ref}}|^2 - 2\Re((R_L + jX_L)(R_{\text{ref}} + jX_{\text{ref}}))}{|Z_L|^2 + |Z_{\text{ref}}|^2 + 2\Re((R_L + jX_L)(R_{\text{ref}} - jX_{\text{ref}}))} \\
&= \frac{|Z_L|^2 + |Z_{\text{ref}}|^2 - 2R_L R_{\text{ref}} + 2X_L X_{\text{ref}}}{|Z_L|^2 + |Z_{\text{ref}}|^2 + 2R_L R_{\text{ref}} + 2X_L X_{\text{ref}}} \leq 1
\end{aligned}$$

• $\frac{1}{2}|a_{p1}|^2, \frac{1}{2}|b_{p1}|^2$ はパワーの流れと解釈できる.

• $|S_{P11}|^2$ はパワーの反射係数と考えていい.



▼ 関係する文献

- ④ • S. Roberts, "Conjugate-image impedances," Proc. IRE, vol. 34, no. 4, pp. 198P–204P, 1946.
- ④ • P. Penfield, Jr., "Noise in negative-resistance amplifiers," IRE Trans. Circuit Theory, vol. 7, no. 2, pp. 166–170, 1960.
- ④ • D. C. Youla, "On scattering matrices normalized to complex port numbers," IRE Proc., vol. 49, no. 7, p. 1221, 1961.
- ④ • K. Kurokawa, "Power waves and the scattering matrix," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 13, no. 2, pp. 194–202, 1965.

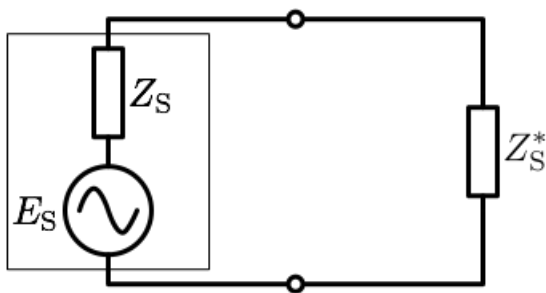


電力波と電圧波・電流波との関係

- 媒質なしで信号源と負荷が直結されている系を考える

まず、共役整合負荷の場合

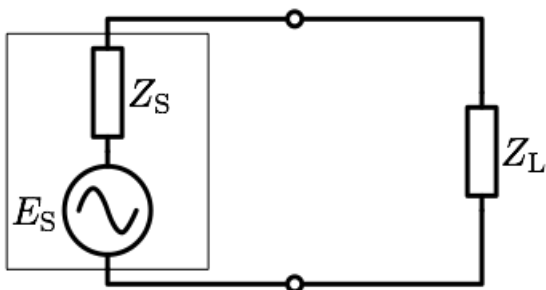
- テブナン型信号源で考える



▶ 信号源インピーダンス $Z_S = R_S + jX_S$

- 入射電流 $I_i \triangleq \frac{E_S}{Z_S + Z_S^*} = \frac{E_S}{2R_S} = I$ (全電流)
- 入射電圧 $V_i \triangleq Z_S^* I_i = \frac{Z_S^* E_S}{Z_S + Z_S^*} = \frac{Z_S^* E_S}{2R_S} = V$ (全電圧)
- 以上の定義により、入射電流と入射電圧は信号源の属性であり、負荷には依存しない

次に、負荷を一般の負荷に置き換える



- 信号源から負荷に向かったパワーがすべて負荷で消費されないなら電流・電圧に「反射があった」と考える

▶ 全電流 $I = \frac{E_S}{Z_S + Z_L} \triangleq I_i - I_r'$ (表現その2: I_r' は符号なし)

- 全電流 $I = \frac{E_S}{Z_S + Z_L} = I_i + I_r$ (表現その1: I_r は符号つき)

- ▼ 反射電流 (その2) $I'_r = I_i - \frac{E_S}{Z_S + Z_L} = I_i - \frac{2R_S I_i}{Z_S + Z_L}$

$$= \left(1 - \frac{2R_S}{Z_S + Z_L}\right) I_i = \frac{Z_L + R_S + jX_S - 2R_S}{Z_L + Z_S} I_i$$

$$= \frac{Z_L - Z_S^*}{Z_L + Z_S} I_i$$

$$\triangleq S_{PI'11} I_i = S_{P11} I_i$$

- 反射電流 (その1) $I_r = \frac{E_S}{Z_S + Z_L} - I_i = \frac{2R_S I_i}{Z_S + Z_L} - I_i$

$$= \left(\frac{2R_S}{Z_S + Z_L} - 1\right) I_i = \frac{2R_S - (Z_L + R_S + jX_S)}{Z_L + Z_S} I_i$$

$$= -\frac{Z_L - Z_S^*}{Z_L + Z_S} I_i$$

$$\triangleq S_{PI11} I_i = -S_{P11} I_i$$

- ▼
$$S_{PI'11}(Z_S) \triangleq \frac{I'_r}{I_i} = \frac{Z_L - Z_S^*}{Z_L + Z_S} \quad \text{電流に対する反射係数 (その2)}$$

$$= S_{P11}(Z_S) \quad \text{一般化 S パラメータ}$$

- S_{P11} は $S_{PI'11}$ に等しい

- ▼ つまり, 一般化S行列は「電流基準 (表現その2)」で定義されているといえる

- だから Z_{ref} が実数の時, 電圧基準のS行列と一致する

- もし「電流基準 (表現その1)」が採用されてたら, Z_{ref} が実数の時, 電流基準のS行列と一致することになる

- 全電圧 $V = Z_L I = \frac{Z_L E_S}{Z_S + Z_L} \triangleq V_i + V_r$

- $$\begin{aligned}
 \text{反射電圧 } V_r &= \frac{Z_L E_S}{Z_S + Z_L} - V_i = \frac{2Z_L R_S V_i}{Z_S^*(Z_S + Z_L)} - V_i \\
 &= \left[\frac{2Z_L R_S}{Z_S^*(Z_S + Z_L)} - 1 \right] V_i \\
 &= \frac{2Z_L R_S - (R_S - jX_S)(Z_L + Z_S)}{Z_S^*(Z_L + Z_S)} V_i \\
 &= \frac{Z_L R_S + jZ_L X_S - Z_S^* Z_S}{Z_S^*(Z_L + Z_S)} V_i \\
 &= \frac{Z_S}{Z_S^*} \left(\frac{Z_L - Z_S^*}{Z_L + Z_S} \right) V_i \\
 &\triangleq S_{PV11} V_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{PV11}(Z_S) &\triangleq \frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_S}{Z_S^*} \cdot \frac{Z_L - Z_S^*}{Z_L + Z_S} \quad (\text{電圧に対する反射係数}) \\
 &= \frac{Z_S}{Z_S^*} S_{PI'11}(Z_S)
 \end{aligned}$$

- Z_S が虚部を持つなら S_{PV11} は $S_{PI'11}$ に一致しない

▼ 電力波の導入 (テブナン型信号源)

- ▼ 信号源が供出できるパワー (available power) は

- ▶
$$\begin{aligned}
 P_{avs} &= \frac{1}{2} \Re(V_i I_i^*) = \frac{1}{2} \Re(Z_S^* I_i I_i^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_S^* I_i I_i^* + Z_S I_i^* I_i}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_S^* + Z_S}{2} \right) I_i I_i^* = \frac{1}{2} \Re(Z_S) I_i I_i^* \\
 &\triangleq \frac{1}{2} a_p a_p^*
 \end{aligned}$$

- ▼ 入射波は以下で定義する

- $a_p \triangleq \sqrt{\Re(Z_S)} I_i \quad (\text{Incident current power wave})$

- S_{PI1} は電流に対する反射係数なので, I_i をもとに定義する

- 次元は「2乗すると電力」になるようにしてある

- ▼ 同様に, 反射波を以下で定義する

- $b_p \triangleq \sqrt{\Re(Z_S)} I_r' \quad (\text{Reflected current power wave})$

- ▼ 全電流と全電圧は

- $$I = I_i - I'_r = \frac{a_p - b_p}{\sqrt{\Re(Z_S)}}$$
- $$V = V_i + V_r = V_i + \frac{Z_S}{Z_S^*} \frac{I'_r}{I_i} V_i = Z_S^* I_i + Z_S I'_r$$

$$= \frac{Z_S^* a_p + Z_S b_p}{\sqrt{\Re(Z_S)}}$$

• 以上より

▽
$$a_p = \frac{V + Z_S I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}}$$

$$b_p = \frac{V - Z_S^* I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}}$$

▽ 導出

- $$V + Z_S I = \frac{Z_S^* a_p + Z_S b_p}{\sqrt{\Re(Z_S)}} + \frac{Z_S (a_p - b_p)}{\sqrt{\Re(Z_S)}} = \frac{(Z_S^* + Z_S) a_p}{\sqrt{\Re(Z_S)}}$$

$$= \frac{2\Re(Z_S) a_p}{\sqrt{\Re(Z_S)}} = 2\sqrt{\Re(Z_S)} a_p$$

- $$\therefore a_p = \frac{V + Z_S I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}}$$

- $$b_p = a_p - I\sqrt{\Re(Z_S)} = \frac{V + Z_S I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}} - I\sqrt{\Re(Z_S)}$$

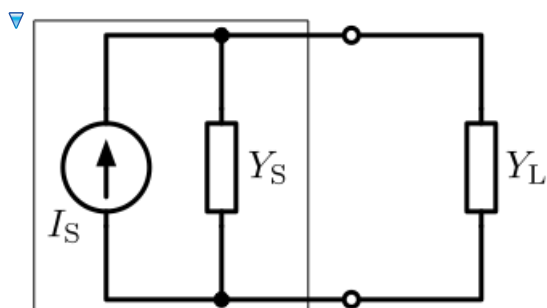
$$= \frac{V + Z_S I - 2\Re(Z_S) I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}} = \frac{V + Z_S I - (Z_S + Z_S^*) I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}}$$

$$= \frac{V + Z_S I - 2\Re(Z_S) I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}} = \frac{V - Z_S^* I}{2\sqrt{\Re(Z_S)}}$$

• これが信号源インピーダンス Z_S を基準インピーダンスとした電力波

▽ ノートン型信号源による導出

• ノートン型信号源で導出をすると、「電圧に対する反射係数」のほうが自然に出てくる



• 信号源アドミッタンス $Y_S = G_S + jB_S$

- $$V = \frac{I_S}{Y_S + Y_L} = V_i + V_r$$

- 反射電圧
$$\begin{aligned} V_r &= \frac{I_S}{Y_S + Y_L} - V_i = \frac{2G_S V_i}{Y_S + Y_L} - V_i \\ &= \left(\frac{2G_S}{Y_S + Y_L} - 1 \right) V_i = \frac{2G_S - Y_L - G_S - jB_S}{Y_L + Y_S} V_i \\ &= -\frac{Y_L - Y_S^*}{Y_L + Y_S} V_i \\ &\triangleq S_{PV11}(Y_S) V_i \end{aligned}$$

- ▼
$$\begin{aligned} S_{PV11}(Y_S) &\triangleq \frac{V_r}{V_i} = -\frac{Y_L - Y_S^*}{Y_L + Y_S} \\ &= -\frac{Z_L^{-1} - (Z_S^*)^{-1}}{Z_L^{-1} + Z_S^{-1}} \cdot \frac{Z_L Z_S}{Z_L Z_S} \\ &= -Z_S \cdot \frac{1 - Z_L (Z_S^*)^{-1}}{Z_L + Z_S} \cdot \frac{Z_S^*}{Z_S} \\ &= \frac{Z_S}{Z_S^*} \cdot \frac{Z_L - Z_S^*}{Z_L + Z_S} = S_{PV11}(Z_S) \end{aligned}$$

- テブナン型信号源を使って導出した結果に一致する

- ただ、一般化Sパラメータの定義としてこの定義 (S_{PV}) が採用されることは少ない

- 入射電流
$$I_i \triangleq Y_S^* V_i = \frac{Y_S^* I_S}{Y_S + Y_S^*} = \frac{Y_S^* I_S}{2G_S}$$

- 反射電流
$$\begin{aligned} I_r &= \frac{Y_L I_S}{Y_S + Y_L} - I_i = \frac{2Y_L G_S I_i}{Y_S^* (Y_S + Y_L)} - I_i \\ &= \left[\frac{2Y_L G_S}{Y_S^* (Y_S + Y_L)} - 1 \right] I_i \\ &= \frac{2Y_L G_S - (G_S - jB_S)(Y_L + Y_S)}{Y_S^* (Y_L + Y_S)} I_i \\ &= \frac{Y_L G_S + jY_L B_S - Y_S^* Y_S}{Y_S^* (Y_L + Y_S)} I_i \\ &= \frac{Y_S}{Y_S^*} \left(\frac{Y_L - Y_S^*}{Y_L + Y_S} \right) I_i \\ &= S_{PI11} I_i \end{aligned}$$

▼ 電力波の導入 (ノートン型信号源)

- ▼ 信号源が供出できるパワー (available power) は

- $$P_{av} = \frac{1}{2} \Re(V_i I_i^*) = \frac{1}{2} \Re(V_i V_i^* Y_S^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{V_i V_i^* Y_S^* + V_i^* V_i Y_S}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{Y_S^* + Y_S}{2} \right) V_i V_i^* = \frac{1}{2} \Re(Y_S) V_i V_i^*$$

$$\triangleq \frac{1}{2} a'_p a'_p{}^*$$

▼ 入射波と反射波は以下で定義する

- | |
|--|
| $a'_p \triangleq \sqrt{\Re(Y_S)} V_i \quad (\text{Incident voltage power wave})$ $b'_p \triangleq \sqrt{\Re(Y_S)} V_r \quad (\text{Reflected voltage power wave})$ |
|--|

▼ 全電圧と全電流は

- $$V = V_i + V_r = \frac{a'_p + b'_p}{\sqrt{\Re(Y_S)}}$$
- $$I = I_i + I_r = I_i + \frac{Y_S}{Y_S^*} \left(-\frac{V_r}{V_i} \right) I_i$$

$$= Y_S^* V_i - Y_S V_r \quad (\because I_i = Y_S^* V_i)$$

$$= \frac{Y_S^* a'_p - Y_S b'_p}{\sqrt{\Re(Y_S)}}$$

• 以上より

▼

$$a'_p = \frac{I + Y_S V}{2\sqrt{\Re(Y_S)}}$$

$$b'_p = -\frac{I - Y_S^* V}{2\sqrt{\Re(Y_S)}}$$

▶ 導出

▼▼ 「電流」電力波と「電圧」電力波の関係

- $$a'_p = \frac{I + Y_S V}{2\sqrt{\Re(Y_S)}} = \frac{I + V/Z_S}{2} \cdot \frac{|Z_S|}{\sqrt{\Re(Z_S)}} = \frac{V + I Z_S}{2\sqrt{\Re(Z_S)}} \cdot \frac{|Z_S|}{Z_S}$$

$$= a_p \frac{|Z_S|}{Z_S} = a_p \cdot e^{-j \arg Z_S}$$
- $$b'_p = -\frac{I - Y_S^* V}{2\sqrt{\Re(Y_S)}} = -\frac{I - V/Z_S^*}{2} \cdot \frac{|Z_S|}{\sqrt{\Re(Z_S)}} = \frac{V - I Z_S^*}{2\sqrt{\Re(Z_S)}} \cdot \frac{|Z_S|}{Z_S^*}$$

$$= b_p \frac{|Z_S|}{Z_S^*} = b_p \cdot e^{j \arg Z_S}$$

- $$S_{PV11}(Z_S) = \frac{b'_p}{a'_p} = \frac{b_p}{a_p} \cdot \frac{Z_S}{Z_S^*}$$

$$= \frac{Z_S}{Z_S^*} S_{P11}(Z_S) = S_{P11}(Z_S) \cdot e^{2j \arg Z_S}$$



▼まとめ

- 電力波の自然な定義は、信号源がテブナン型かノートン型かに依存する

- ▼信号源がテブナン型なら自然な定義は

- $$a_p = \sqrt{\Re(Z_S)} I_i, \quad b_p = \sqrt{\Re(Z_S)} I'_r$$

- これが、通常採用されている定義。「電流」電力波.

- ▼信号源がノートン型なら自然な定義は

- $$a'_p = \sqrt{\Re(Y_S)} V_i, \quad b'_p = \sqrt{\Re(Y_S)} V_r,$$

- これが「電圧」電力波

▼クイズ

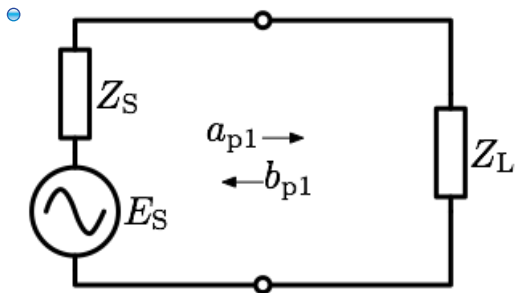
- 信号源の表現次第で上記のような違いが出る理由は？ なにか物理的な理由がある？



パワーの反射係数 vs 電圧の反射係数

- 「反射係数」といってもみな同じではない

▼パワーの反射係数



- パワーは保存量

▼負荷に流れ込むパワーは

$$P_L = \frac{1}{2} |a_{p1}|^2 (1 - |S_{P11}|^2)$$

▼ $|S_{P11}|^2$ がパワーの反射係数

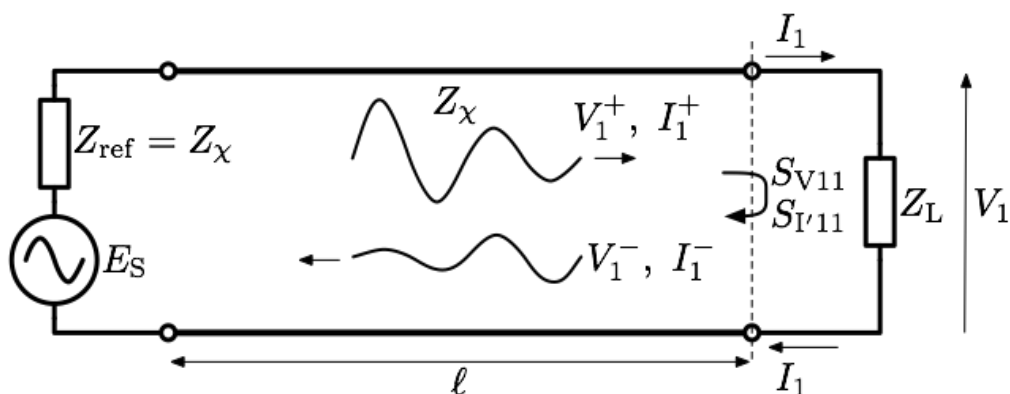
- 注意： S_{P11} はパワーの反射係数ではない

- パワーの反射係数は実数

▼ Z_L が passive なら $0 \leq |S_{P11}|^2 \leq 1$

- そうじゃないとエネルギーが保存しない

▼電圧の反射係数



$$V_1 = V_1^+ + V_1^- = V_1^+ \left(1 + \frac{V_1^-}{V_1^+} \right) = V_1^+ [1 + S_{V11}(Z_x)]$$

▽ $S_{V11}(Z_x)$ が電圧の反射係数

- 注意：ここでは特性インピーダンスが Z_x の伝送線路中に立つ波で反射係数を考えてるので、基準インピーダンスとして Z_x を使わなければならない。 $Z_{\text{ref}} \neq Z_x$ なら $S_{V11}(Z_{\text{ref}}) \neq S_{V11}(Z_x)$ だから正しい式にならない。

▽ 電圧の反射係数は複素数

- 反射係数の絶対値は、振幅同士の比を表す
- 反射係数の偏角は位相回転を表す
- 電圧は保存量じゃないから、エネルギー保存則に抵触しない限り $|S_{V11}(Z_x)|$ が1を超えてはならない物理的な理由はない

電力波に対する散乱行列（一般化S行列）



$$\begin{bmatrix} b_{p1} \\ b_{p2} \end{bmatrix} = S_P \begin{bmatrix} a_{p1} \\ a_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{P11} & S_{P12} \\ S_{P21} & S_{P22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{p1} \\ a_{p2} \end{bmatrix}$$

- 共役整合したときに反射係数（対角成分）がゼロになる

波変数（電力波）の定義

$$a_{pi} = \frac{V_i + Z_{refi} I_i}{2\sqrt{\Re(Z_{refi})}}$$

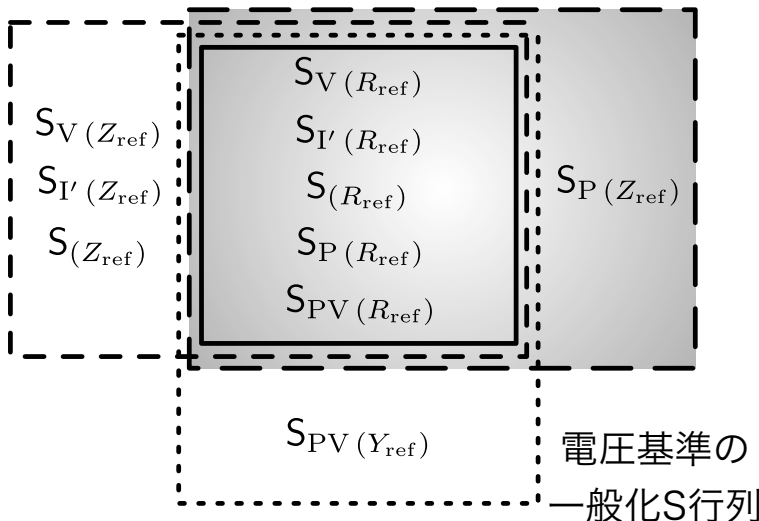
$$b_{pj} = \frac{V_j - Z_{refj}^* I_j}{2\sqrt{\Re(Z_{refj})}}$$

一般化Sパラメータ

$$S_{Pji} = \left. \frac{b_{pj}}{a_{pi}} \right|_{a_{pj(\neq i)}=0}$$

電圧基準の S行列

電流基準の 一般化S行列

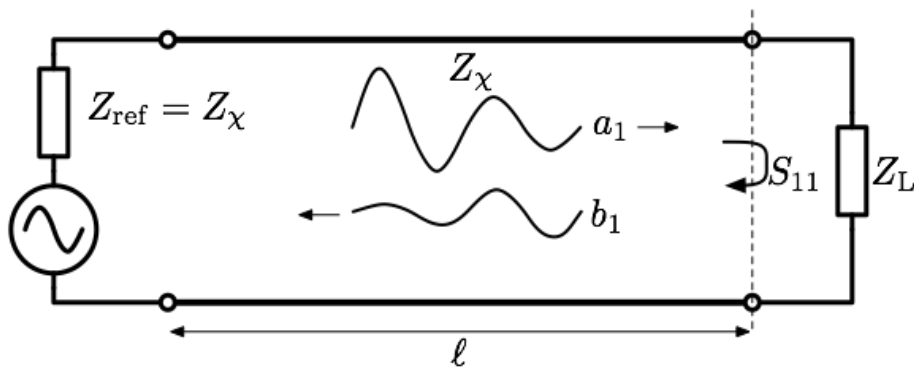


- $S_{(R_{\text{ref}})}$ は $S_{P(Z_{\text{ref}})}$ のサブセットだと思っいていいが, $S_{P(Z_{\text{ref}})}$ は特異な性質があるので, 別物だと思ったほうがいい.
- 厳密には, $S_{P(Z_{\text{ref}})}$ のサブセットなのは $S_{I'(Z_{\text{ref}})}$.

通常のS行列と一般化S行列の比較

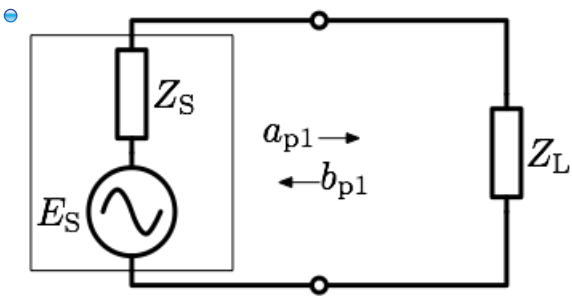
▼通常の（進行波に対する）S行列

- 進行波に対するS行列は「ネットワークを取り囲む媒質（伝送線路）中にどのような反射波・透過波が生じるか」によってネットワークを表現したもの
- したがって、 Z_{ref} としてはネットワークを取り囲む媒質の特性インピーダンス Z_x を選ぶのが基本
- Z_{ref} が虚部を持つなら、媒質中で電圧進行波と電流進行波との間に位相差がある
- 波変数 a_i, b_i は電圧と関係が深い



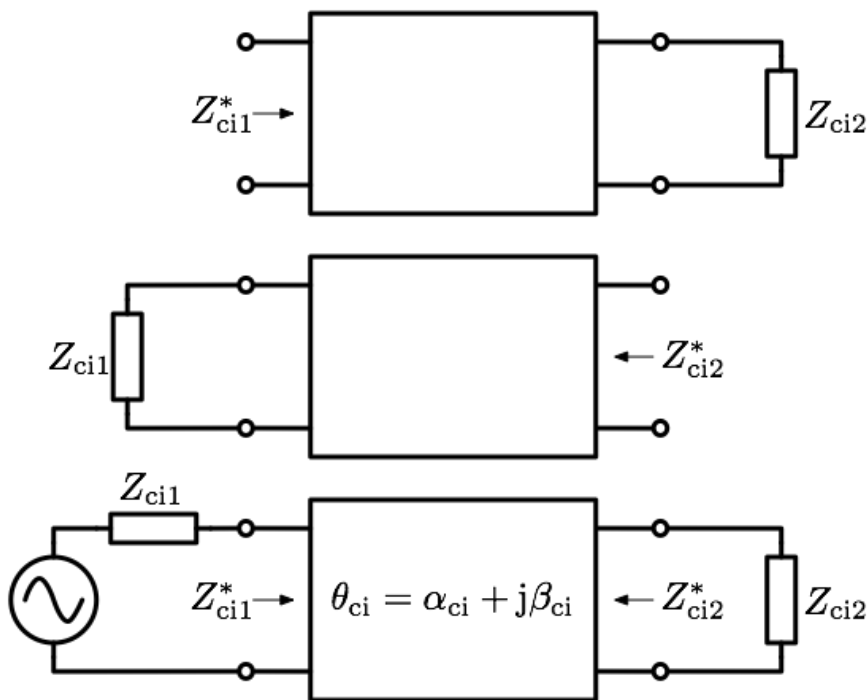
▼一般化S行列（ S_p 行列）

- 電力波に対する S_p 行列は「信号源（or 終端器）と共役整合しているかどうか・どれだけずれているか」を基本にした表現
- したがって、 Z_{ref} としては信号源（or 終端器）のインピーダンス Z_S を選ぶのが基本
- 負荷が吸収した電力が信号源から供給できる最大値（available power）より小さかったら「パワーが反射して戻ってきた」と解釈する
- 媒質には関心がない。つまり線路長は $\ell \rightarrow 0$ と暗に仮定している
- 信号源がテブナン型の場合、波変数 a_{pi}, b_{pi} は電流と関係が深い



共役映像パラメータ

- ▽ 「映像インピーダンス (image impedances)」 は、通常のS行列の意味で「無反射」を実現する終端インピーダンスのペア
 - これに対応して「映像伝送量」が定義される
- ▽ 「共役映像インピーダンス (conjugate-image impedances)」 は、 S_p 行列の意味で「無反射」を実現する終端インピーダンスのペア
 - これに対応して「共役映像伝送量」が定義される



- Z_{ci1}, Z_{ci2} で終端すると同時共役整合になる
 - 同時共役整合が可能な場合 (2ポートが無条件安定な場合) のみ, $\Re(Z_{ci1}) > 0, \Re(Z_{ci2}) > 0$ なる Z_{ci1} と Z_{ci2} が存在する.
 - 一般には $Z_{ci1} \neq Z_{i1}, Z_{ci2} \neq Z_{i2}$
- ▽ ABCD行列との関係

- 同時共役整合時の入力インピーダンスを Z_{ci1}^* , Z_{ci2}^* とすると

$$Z_{ci1}^* = \frac{j\Im(AD^* + BC^*) \pm \sqrt{-[\Im(AD^* + BC^*)]^2 + 4\Re(CD^*)\Re(AB^*)}}{2\Re(CD^*)}$$

$$Z_{ci2}^* = \frac{j\Im(DA^* + BC^*) \pm \sqrt{-[\Im(DA^* + BC^*)]^2 + 4\Re(CA^*)\Re(DB^*)}}{2\Re(CA^*)}$$

▽ S_P 行列との関係

- $Z_{ref} = \begin{bmatrix} Z_{ci1} & 0 \\ 0 & Z_{ci2} \end{bmatrix}$ を基準インピーダンス行列としたときの

$$S_P \text{ 行列は } S_P(Z_{ref}) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\theta_{ci12}} \\ e^{-\theta_{ci21}} & 0 \end{bmatrix}$$

- $|S_{P21}(Z_{ci1}, Z_{ci2})|^2 = |e^{-\theta_{ci21}}|^2$ は最大可用利得 (maximum available gain, MAG) と呼ばれる。

▽ 文献

- ① S. Roberts, "Conjugate-image impedances," Proc. IRE, vol. 34, no. 4, pp. 198P–204P, 1946.



一般化S行列のちょっと変わった性質

▽1. Smith chart がそのままでは使えない

▽理由：インピーダンスと反射係数との関係式が通常と異なるから

▽
$$S_{11} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \quad (\text{普通の電圧反射係数})$$

• スミスチャートはこの式から導出される

▽
$$S_{P11} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}^*}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \quad (\text{電力波に対する反射係数})$$

• 式が違う

▽スミスチャート上に S_{P11} をプロットするには？

•
$$S_{P11} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}^*}{Z_L + Z_{\text{ref}}} = \frac{[R_L + j(X_L + X_{\text{ref}})] - R_{\text{ref}}}{[R_L + j(X_L + X_{\text{ref}})] + R_{\text{ref}}}$$
$$= \frac{Z'_L - R_{\text{ref}}}{Z'_L + R_{\text{ref}}}$$

$$Z'_L \triangleq R_L + j(X_L + X_{\text{ref}})$$

$$Z_{\text{ref}} = R_{\text{ref}} + jX_{\text{ref}}$$

• 中心が R_{ref} のスミスチャートに Z'_L をプロットすれば S_{P11} の絶対値と偏角がわかる

▽2. 反射係数の値が普通と違う（ことがほとんど）

▽OPENの反射係数

• $Z_L = \infty$

•
$$S_{11} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \Bigg|_{Z_L=\infty} = 1$$

▽
$$S_{P11} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}^*}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \Bigg|_{Z_L=\infty} = 1$$

• これは普通と同じ

▽SHORTの反射係数

• $Z_L = 0$

•
$$S_{11} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \Bigg|_{Z_L=0} = -1$$

$$\nabla S_{P11} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}^*}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \Big|_{Z_L=0} = -\frac{Z_{\text{ref}}^*}{Z_{\text{ref}}}$$

- Z_{ref} が複素数ならSHORTの反射係数が -1 じゃない
- ただし $|S_{P11}| = 1$ にはなっている

▼3. $Z_{\text{ref}}=Z_x$ にしても伝送線路の S_p 行列の対角要素は0にならない (Z_x が複素数の場合)

- 理由：映像インピーダンス (=特性インピーダンス) と共役映像インピーダンスは一致しないから

$$S_{P(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{(Z_x^2 + Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) + 2Z_x Z_{\text{ref}}} \times \begin{bmatrix} (Z_x^2 - |Z_{\text{ref}}|^2) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_x \Im(Z_{\text{ref}}) & 2Z_x \Re(Z_{\text{ref}}) / \cosh(\gamma\ell) \\ 2Z_x \Re(Z_{\text{ref}}) / \cosh(\gamma\ell) & (Z_x^2 - |Z_{\text{ref}}|^2) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_x \Im(Z_{\text{ref}}) \end{bmatrix}$$

▼参考：通常のS行列

$$S_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{(Z_x^2 + Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) + 2Z_x Z_{\text{ref}}} \times \begin{bmatrix} (Z_x^2 - Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) & 2Z_x Z_{\text{ref}} / \cosh(\gamma\ell) \\ 2Z_x Z_{\text{ref}} / \cosh(\gamma\ell) & (Z_x^2 - Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) \end{bmatrix}$$

▼有損失伝送線路の共役映像インピーダンスは線路の長さに依存する

- それに対して映像インピーダンス (=特性インピーダンス) は線路の長さに依存しない

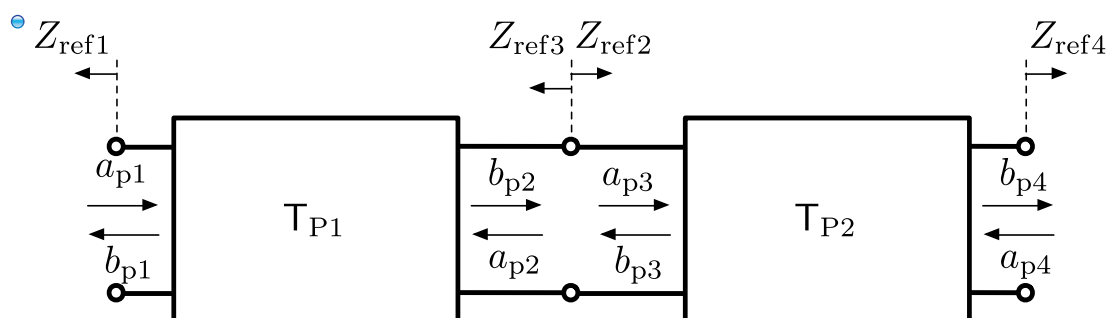
▼4. S_p パラメータを直接測定する方法は知られていない

- まずS行列を測定し、それを S_p 行列に変換するしかない

▼5. シグナルフローグラフや縦続接続を考える際に注意が必要

- 接続面で基準インピーダンス同士が複素共役の関係になっていなければならない

▼理由



• 接続面で $b_{p2} = a_{p3}$, $a_{p2} = b_{p3}$ でなければならない.

• 接続面では $V_2 = V_3$, $I_2 = -I_3$ が成り立っている.

• $a_{pi}(Z_{refi}) = \frac{V_i + Z_{refi}I_i}{2\sqrt{\Re(Z_{refi})}}$, $b_{pj}(Z_{refj}) = \frac{V_j - Z_{refj}^*I_j}{2\sqrt{\Re(Z_{refj})}}$ だから

• $Z_{ref2} = Z_{ref3}^*$ でなければならない.

▼文献

- R. B. Marks and D. F. Williams, "Comments on 'Conversions between S, Z, Y, H, ABCD, and T parameters which are valid for complex source and load impedances,'" IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 43, no. 4, p. 914, April 1995.

一般化S行列の変換式

▽特性インピーダンス行列

- $$Z_{\text{ref}} \triangleq \begin{bmatrix} Z_{\text{ref}1} & & & \\ & Z_{\text{ref}2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_{\text{ref}n} \end{bmatrix}$$

- $$R_{\text{ref}} \triangleq \Re(Z_{\text{ref}})$$

▽Z から S_P へ

- $$S_P = R_{\text{ref}}^{-1/2} (Z - Z_{\text{ref}}^*) (Z + Z_{\text{ref}})^{-1} R_{\text{ref}}^{1/2}$$

▽Y から S_P へ

- $$S_P = R_{\text{ref}}^{-1/2} Z_{\text{ref}}^* (Y_{\text{ref}}^* - Y) (Y_{\text{ref}} + Y)^{-1} R_{\text{ref}}^{1/2} Z_{\text{ref}}^{-1}$$

▽ S_P から Z へ

- $$Z = R_{\text{ref}}^{1/2} (1_n - S_P)^{-1} \left(R_{\text{ref}}^{-1/2} Z_{\text{ref}}^* + S_P R_{\text{ref}}^{-1/2} Z_{\text{ref}} \right)$$

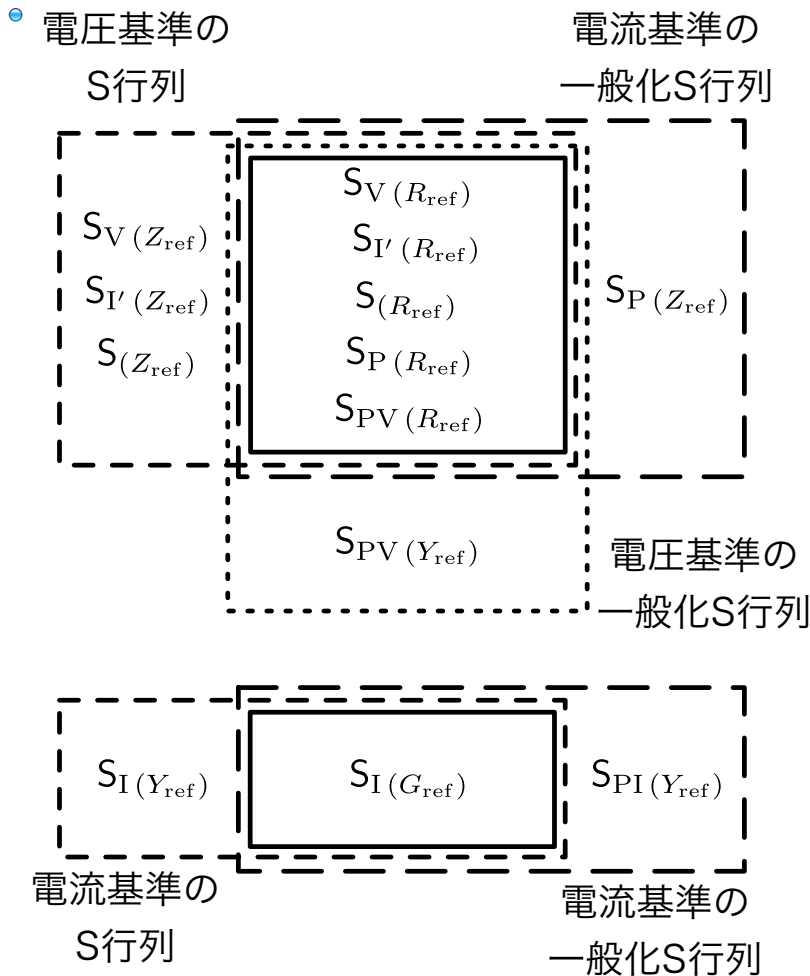
▽ S_P から Y へ

- $$Y = \left(R_{\text{ref}}^{-1/2} Z_{\text{ref}}^* + S_P R_{\text{ref}}^{-1/2} Z_{\text{ref}} \right)^{-1} (1_n - S_P) R_{\text{ref}}^{-1/2}$$



各種S行列の使い分け

▼使い分け（すべてのポートの基準インピーダンスが等しい場合）



▼1. 「電流反射係数」だけは電流基準で定義するのが普通

- $S_{I11}(Y_x)$ を使う

▼2. 「S行列」といえば通常は電圧基準のもの

- ▼I. R_{ref} （正の実数固定値）で normalize されたものはすべて一致するので違いを意識する必要はない

- 基本的には $S_{(R_{ref})}$ 使えばいい

- ▼II. 複素数の Z_{ref} を使う（使わざるを得ない）場合には、包含関係の図で左（通常の進行波に対するS行列）と右（電力波に対する一般化S行列）の区別が重要

- ▼測定で出てくるのは進行波に対するS行列

- $\rightarrow S_{(Z_x)}$ を使う (しかない)

- ▽ S_p 行列はアンプの段間整合とかを考えるのに便利

- $\rightarrow S_{P(Z_{ref})}$ を使ってもいい

- ただ、実際には Z_{ref} が複素数で、かつ全ポートで値が同じという状況はあまりなかるう

- ▽ **ポートごとの基準インピーダンスが異なる場合**

- 1. アンプ設計等で信号源・負荷インピーダンスの影響までを繰り込んで反射やゲインを考えなければ S_p 行列も便利
- 2. 測定関係ではS行列を使う

伝送線路

- 伝送線路に関する式のまとめ127
- 伝搬定数 γ の計算式132

伝送線路に関する式のまとめ

$$\begin{aligned} \nabla V(x) &= \Re(V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x}) \\ I(x) &= \Re(Y_\chi (V^+ e^{-\gamma x} - V^- e^{\gamma x})) \end{aligned}$$

• これを

$$\begin{aligned} V(x) &= V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x} \\ I(x) &= Y_\chi (V^+ e^{-\gamma x} - V^- e^{\gamma x}) \end{aligned}$$

と略記することが多い。

伝搬定数

$$\begin{aligned} \bullet \gamma &= [(R + jX)(G + jB)]^{1/2} = [(R + j\omega L)(G + j\omega C)]^{1/2} \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + X^2)(G^2 + B^2)} + (RG - XB) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC) \right]} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + X^2)(G^2 + B^2)} - (RG - XB) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC) \right]} \end{aligned}$$

導出

$$\begin{aligned} \bullet |\gamma|^2 &= [(R + jX)(G + jB)]^{1/2} [(R - jX)(G - jB)]^{1/2} \\ &= [(R^2 + X^2)(G^2 + B^2)]^{1/2} \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \gamma^2 &= (jB + G)(jX + R) \\ &= RG - XB + j(RB + GX) \\ &= \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta \end{aligned}$$

$$\bullet \therefore \alpha^2 - \beta^2 = RG - XB$$

$$\begin{aligned} \bullet 2\alpha^2 &= [(R^2 + X^2)(G^2 + B^2)]^{1/2} + (RG - XB) \\ 2\beta^2 &= [(R^2 + X^2)(G^2 + B^2)]^{1/2} - (RG - XB) \end{aligned}$$

特性インピーダンス

$$\triangleright Z_x = \frac{1}{Y_x} = \left(\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \right)^{1/2} = R_x + jX_x$$

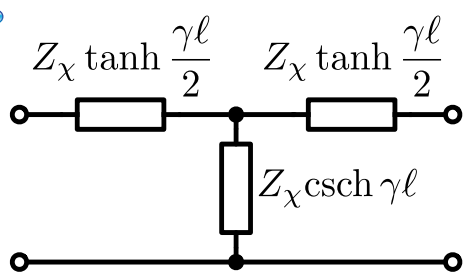
$$\triangleright R_x = \frac{\sqrt{\sqrt{(RG + \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG - CR)^2} + RG + \omega^2 LC}}{\sqrt{2(G^2 + \omega^2 C^2)}}$$

$$X_x = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{(RG + \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG - CR)^2} - (RG + \omega^2 LC)}}{\sqrt{2(G^2 + \omega^2 C^2)}}$$

▽ ABCD行列

$$\bullet F = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma\ell) & Z_x \sinh(\gamma\ell) \\ Y_x \sinh(\gamma\ell) & \cosh(\gamma\ell) \end{bmatrix}$$

▽ Z行列

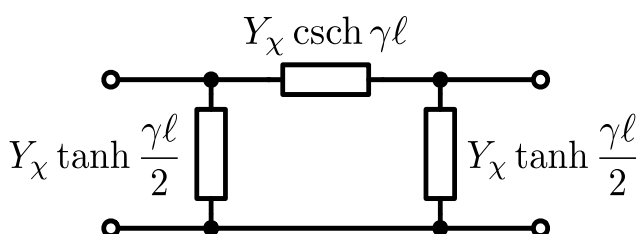
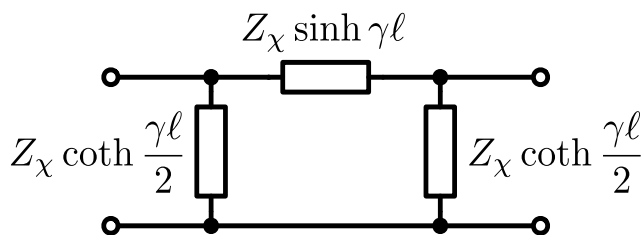


$$\triangleright Z = Z_x \begin{bmatrix} \tanh \frac{\gamma\ell}{2} + \operatorname{csch}(\gamma\ell) & \operatorname{csch}(\gamma\ell) \\ \operatorname{csch}(\gamma\ell) & \tanh \frac{\gamma\ell}{2} + \operatorname{csch}(\gamma\ell) \end{bmatrix}$$

$$= Z_x \begin{bmatrix} \operatorname{coth}(\gamma\ell) & \operatorname{csch}(\gamma\ell) \\ \operatorname{csch}(\gamma\ell) & \operatorname{coth}(\gamma\ell) \end{bmatrix}$$

$$\triangleright \because \tanh \frac{\gamma\ell}{2} + \operatorname{csch}(\gamma\ell) = \frac{\cosh z - 1}{\sinh z} + \frac{1}{\sinh z} = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \operatorname{coth} z$$

▽ Y行列



$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= Y_\chi \begin{bmatrix} \tanh \frac{\gamma\ell}{2} + \operatorname{csch}(\gamma\ell) & -\operatorname{csch}(\gamma\ell) \\ -\operatorname{csch}(\gamma\ell) & \tanh \frac{\gamma\ell}{2} + \operatorname{csch}(\gamma\ell) \end{bmatrix} \\
&= Y_\chi \begin{bmatrix} \coth(\gamma\ell) & -\operatorname{csch}(\gamma\ell) \\ -\operatorname{csch}(\gamma\ell) & \coth(\gamma\ell) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

▼ S行列

$$\begin{aligned}
S_{(Z_{\text{ref}})} &= \frac{1}{Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}}^2 + 2Z_\chi Z_{\text{ref}} \coth(\gamma\ell)} \begin{bmatrix} Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2 & 2Z_\chi Z_{\text{ref}} / \sinh(\gamma\ell) \\ 2Z_\chi Z_{\text{ref}} / \sinh(\gamma\ell) & Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) + 2Z_\chi Z_{\text{ref}}} \begin{bmatrix} (Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) & 2Z_\chi Z_{\text{ref}} / \cosh(\gamma\ell) \\ 2Z_\chi Z_{\text{ref}} / \cosh(\gamma\ell) & (Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) + 2Z_\chi Z_{\text{ref}} \cosh(\gamma\ell)} \begin{bmatrix} (Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) & 2Z_\chi Z_{\text{ref}} \\ 2Z_\chi Z_{\text{ref}} & (Z_\chi^2 - Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) \end{bmatrix} \\
\rightarrow S_{(Z_\chi)} &= \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma\ell} \\ e^{-\gamma\ell} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{(Z_{\text{ref1}}, Z_{\text{ref2}})} &= \begin{bmatrix} \frac{(Z_\chi^2 - Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref2}} - Z_{\text{ref1}})}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})} & \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref1}})} |Z_{\text{ref2}}|}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref2}})} |Z_{\text{ref1}}|} \frac{2Z_\chi Z_{\text{ref1}} / \cosh \gamma\ell}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})} \\ \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref2}})} |Z_{\text{ref1}}|}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref1}})} |Z_{\text{ref2}}|} \frac{2Z_\chi Z_{\text{ref2}} / \cosh \gamma\ell}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})} & \frac{(Z_\chi^2 - Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} - Z_{\text{ref2}})}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (Z_\chi^2 - Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref2}} - Z_{\text{ref1}}) & \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref1}})} |Z_{\text{ref2}}|}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref2}})} |Z_{\text{ref1}}|} \frac{2Z_\chi Z_{\text{ref1}}}{\cosh \gamma\ell} \\ \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref2}})} |Z_{\text{ref1}}|}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref1}})} |Z_{\text{ref2}}|} \frac{2Z_\chi Z_{\text{ref2}}}{\cosh \gamma\ell} & (Z_\chi^2 - Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} - Z_{\text{ref2}}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

▼ ▼ 導出 (ポートごとの基準インピーダンスが違う場合)

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{Z_{\text{in1}} - Z_{\text{ref1}}}{Z_{\text{in1}} + Z_{\text{ref1}}} \\
Z_{\text{in1}} &= Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref2}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref2}} \tanh \gamma\ell} \quad (\text{ポート 1 の入力インピーダンス})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_{11}(Z_{\text{ref1}}, Z_{\text{ref2}}) &= \frac{Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref2}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref2}} \tanh \gamma\ell} - Z_{\text{ref1}}}{Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref2}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref2}} \tanh \gamma\ell} + Z_{\text{ref1}}} \\
&= \frac{Z_\chi (Z_{\text{ref2}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell) - Z_{\text{ref1}} (Z_\chi + Z_{\text{ref2}} \tanh \gamma\ell)}{Z_\chi (Z_{\text{ref2}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell) + Z_{\text{ref1}} (Z_\chi + Z_{\text{ref2}} \tanh \gamma\ell)} \\
&= \frac{(Z_\chi^2 - Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref2}} - Z_{\text{ref1}})}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= \frac{Z_{\text{in2}} - Z_{\text{ref2}}}{Z_{\text{in2}} + Z_{\text{ref2}}} \\
Z_{\text{in2}} &= Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref1}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref1}} \tanh \gamma\ell} \quad (\text{ポート 2 の入力インピーダンス})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_{22}(Z_{\text{ref1}}, Z_{\text{ref2}}) &= \frac{Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref1}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref1}} \tanh \gamma\ell} - Z_{\text{ref2}}}{Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref1}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref1}} \tanh \gamma\ell} + Z_{\text{ref2}}} \\
&= \frac{Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell) - Z_{\text{ref2}} (Z_\chi + Z_{\text{ref1}} \tanh \gamma\ell)}{Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_\chi \tanh \gamma\ell) + Z_{\text{ref2}} (Z_\chi + Z_{\text{ref1}} \tanh \gamma\ell)} \\
&= \frac{(Z_\chi^2 - Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} - Z_{\text{ref2}})}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref1}} Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi (Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{21} &= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}(V_2 - Z_{\text{ref}2}I_2)}{2|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2|Z_{\text{ref}1}|}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}(V_1 + Z_{\text{ref}1}I_1)} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}V_2}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2|Z_{\text{ref}1}|}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}(V_1 + Z_{\text{ref}1}I_1)} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2V_2}{V_1 + Z_{\text{ref}1}(V_1/Z_{\text{in}1})} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2V_2}{V_1} \cdot \frac{Z_{\text{in}1}}{Z_{\text{in}1} + Z_{\text{ref}1}}
\end{aligned}$$

$$V_1 = V_1^+ + V_1^- = V_1^+ (1 + \Gamma_{\text{in}1}(Z_\chi)) = V_1^+ \left(1 + \frac{Z_{\text{in}1}(Z_\chi) - Z_\chi}{Z_{\text{in}1}(Z_\chi) + Z_\chi} \right)$$

$\Gamma_{\text{in}1}(Z_\chi)$ は普通の電圧反射係数.

$$\begin{aligned}
V_2 &= V_1^+ e^{-\gamma\ell} + V_1^- e^{\gamma\ell} = V_1^+ (e^{-\gamma\ell} + \Gamma_{\text{in}1}(Z_\chi) e^{\gamma\ell}) \\
&= V_1^+ \left(e^{-\gamma\ell} + \frac{Z_{\text{in}1}(Z_\chi) - Z_\chi}{Z_{\text{in}1}(Z_\chi) + Z_\chi} e^{\gamma\ell} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{V_1} &= \frac{e^{-\gamma\ell} + \frac{Z_{\text{in}1} - Z_\chi}{Z_{\text{in}1} + Z_\chi} e^{\gamma\ell}}{1 + \frac{Z_{\text{in}1} - Z_\chi}{Z_{\text{in}1} + Z_\chi}} \\
&= \frac{(Z_{\text{in}1} + Z_\chi)e^{-\gamma\ell} + (Z_{\text{in}1} - Z_\chi)e^{\gamma\ell}}{2Z_{\text{in}1}} = \frac{Z_{\text{in}1}(e^{-\gamma\ell} + e^{\gamma\ell}) + Z_\chi(e^{-\gamma\ell} - e^{\gamma\ell})}{2Z_{\text{in}1}} \\
&= \frac{Z_{\text{in}1} \cosh \gamma\ell - Z_\chi \sinh \gamma\ell}{Z_{\text{in}1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_{21} &= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2(Z_{\text{in}1} \cosh \gamma\ell - Z_\chi \sinh \gamma\ell)}{Z_{\text{in}1}} \cdot \frac{Z_{\text{in}1}}{Z_{\text{in}1} + Z_{\text{ref}1}} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2(Z_{\text{in}1} \cosh \gamma\ell - Z_\chi \sinh \gamma\ell)}{Z_{\text{in}1} + Z_{\text{ref}1}} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot 2 \cdot \frac{Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref}2} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref}2} \tanh \gamma\ell} \cosh \gamma\ell - Z_\chi \sinh \gamma\ell}{Z_\chi \cdot \frac{Z_{\text{ref}2} + Z_\chi \tanh \gamma\ell}{Z_\chi + Z_{\text{ref}2} \tanh \gamma\ell} + Z_{\text{ref}1}} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot 2 \cdot \frac{Z_\chi(Z_{\text{ref}2} + Z_\chi \tanh \gamma\ell) \cosh \gamma\ell - Z_\chi(Z_\chi + Z_{\text{ref}2} \tanh \gamma\ell) \sinh \gamma\ell}{Z_\chi(Z_{\text{ref}2} + Z_\chi \tanh \gamma\ell) + Z_{\text{ref}1}(Z_\chi + Z_{\text{ref}2} \tanh \gamma\ell)} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot 2 \cdot \frac{Z_\chi Z_{\text{ref}2} \cosh \gamma\ell - Z_\chi Z_{\text{ref}2} \tanh \gamma\ell \sinh \gamma\ell}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}1} Z_{\text{ref}2}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi(Z_{\text{ref}1} + Z_{\text{ref}2})} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot 2 \cdot \frac{Z_\chi Z_{\text{ref}2} (\cosh \gamma\ell - \tanh \gamma\ell \sinh \gamma\ell)}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}1} Z_{\text{ref}2}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi(Z_{\text{ref}1} + Z_{\text{ref}2})} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2}{\cosh \gamma\ell} \cdot \frac{Z_\chi Z_{\text{ref}2} (\cosh^2 \gamma\ell - \sinh^2 \gamma\ell)}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}1} Z_{\text{ref}2}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi(Z_{\text{ref}1} + Z_{\text{ref}2})} \\
&= \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}} \frac{|Z_{\text{ref}1}|}{|Z_{\text{ref}2}|} \cdot \frac{2Z_\chi Z_{\text{ref}2} / \cosh \gamma\ell}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}1} Z_{\text{ref}2}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi(Z_{\text{ref}1} + Z_{\text{ref}2})}
\end{aligned}$$

$$\therefore S_{12} = \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}1})}}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}2})}} \frac{|Z_{\text{ref}2}|}{|Z_{\text{ref}1}|} \cdot \frac{2Z_\chi Z_{\text{ref}1} / \cosh \gamma\ell}{(Z_\chi^2 + Z_{\text{ref}1} Z_{\text{ref}2}) \tanh \gamma\ell + Z_\chi(Z_{\text{ref}1} + Z_{\text{ref}2})}$$

$$\bullet \quad \mathbf{T}_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{2Z_{\chi}Z_{\text{ref}}} \begin{bmatrix} (Z_{\chi}^2 + Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) + 2Z_{\chi}Z_{\text{ref}} \cosh(\gamma\ell) & -(Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) \\ (Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) & \frac{4Z_{\chi}^2Z_{\text{ref}}^2 - (Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref}}^2)^2 \sinh^2(\gamma\ell)}{(Z_{\chi}^2 + Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) + 2Z_{\chi}Z_{\text{ref}} \cosh(\gamma\ell)} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{T}_{(Z_{\chi})} = \begin{bmatrix} e^{\gamma\ell} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma\ell} \end{bmatrix}$$

▼ R行列

$$\bullet \quad \mathbf{R}_{(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{2Z_{\chi}Z_{\text{ref}}} \begin{bmatrix} \frac{4Z_{\chi}^2Z_{\text{ref}}^2 - (Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref}}^2)^2 \sinh^2(\gamma\ell)}{(Z_{\chi}^2 + Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) + 2Z_{\chi}Z_{\text{ref}} \cosh(\gamma\ell)} & (Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) \\ -(Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) & (Z_{\chi}^2 + Z_{\text{ref}}^2) \sinh(\gamma\ell) + 2Z_{\chi}Z_{\text{ref}} \cosh(\gamma\ell) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{R}_{(Z_{\chi})} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma\ell} & 0 \\ 0 & e^{\gamma\ell} \end{bmatrix}$$

▼ 一般化S行列 (S_P)

$$\bullet \quad \mathbf{S}_{P(Z_{\text{ref}})} = \frac{1}{(Z_{\chi}^2 + Z_{\text{ref}}^2) \tanh(\gamma\ell) + 2Z_{\chi}Z_{\text{ref}}} \times \begin{bmatrix} (Z_{\chi}^2 - |Z_{\text{ref}}|^2) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_{\chi}\Im(Z_{\text{ref}}) & 2Z_{\chi}\Re(Z_{\text{ref}})/\cosh(\gamma\ell) \\ 2Z_{\chi}\Re(Z_{\text{ref}})/\cosh(\gamma\ell) & (Z_{\chi}^2 - |Z_{\text{ref}}|^2) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_{\chi}\Im(Z_{\text{ref}}) \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \mathbf{S}_{P(Z_{\chi})} = \frac{1}{2Z_{\chi}^2 \tanh(\gamma\ell) + 2Z_{\chi}^2} \begin{bmatrix} (Z_{\chi}^2 - |Z_{\chi}|^2) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_{\chi}\Im(Z_{\chi}) & 2Z_{\chi}\Re(Z_{\chi})/\cosh(\gamma\ell) \\ 2Z_{\chi}\Re(Z_{\chi})/\cosh(\gamma\ell) & (Z_{\chi}^2 - |Z_{\chi}|^2) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_{\chi}\Im(Z_{\chi}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2Z_{\chi}^2[1 + \tanh(\gamma\ell)]} \begin{bmatrix} Z_{\chi}(Z_{\chi} - Z_{\chi}^*) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_{\chi}\Im(Z_{\chi}) & 2Z_{\chi}\Re(Z_{\chi})/\cosh(\gamma\ell) \\ 2Z_{\chi}\Re(Z_{\chi})/\cosh(\gamma\ell) & Z_{\chi}(Z_{\chi} - Z_{\chi}^*) \tanh(\gamma\ell) + j2Z_{\chi}\Im(Z_{\chi}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Z_{\chi}} \begin{bmatrix} j\Im(Z_{\chi}) & \Re(Z_{\chi})/[\sinh(\gamma\ell) + \cosh(\gamma\ell)] \\ \Re(Z_{\chi})/[\sinh(\gamma\ell) + \cosh(\gamma\ell)] & j\Im(Z_{\chi}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Z_{\chi}} \begin{bmatrix} j\Im(Z_{\chi}) & \Re(Z_{\chi})e^{-\gamma\ell} \\ \Re(Z_{\chi})e^{-\gamma\ell} & j\Im(Z_{\chi}) \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \mathbf{S}_{P(Z_{\text{ref1}}, Z_{\text{ref2}})} = \frac{1}{(Z_{\chi}^2 + Z_{\text{ref1}}Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_{\chi}(Z_{\text{ref1}} + Z_{\text{ref2}})} \times \begin{bmatrix} (Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref1}}^*Z_{\text{ref2}}) \tanh \gamma\ell + Z_{\chi}(Z_{\text{ref2}} - Z_{\text{ref1}}^*) & 2Z_{\chi}\sqrt{\Re(Z_{\text{ref1}})\Re(Z_{\text{ref2}})}/\cosh \gamma\ell \\ 2Z_{\chi}\sqrt{\Re(Z_{\text{ref1}})\Re(Z_{\text{ref2}})}/\cosh \gamma\ell & (Z_{\chi}^2 - Z_{\text{ref1}}Z_{\text{ref2}}^*) \tanh \gamma\ell + Z_{\chi}(Z_{\text{ref1}} - Z_{\text{ref2}}^*) \end{bmatrix}$$

▶ ▼ 導出 (ポートごとの基準インピーダンスが違う場合)

▶

伝搬定数 γ の計算式

▼ 長さ l の伝送線路のS行列から求めるなら

- De-embed 済みのS行列があるなら次式で計算できる

$$e^{-\gamma l} = \frac{-(S_{11}^2 - 1 - S_{21}^2) \pm \sqrt{(S_{11}^2 - 1 - S_{21}^2)^2 - 4S_{21}^2}}{2S_{21}}$$

▼ β の符号を見て復号のうち適切なほうを選ぶといい

- ▶ 通常の（右手系）線路なら低い周波数では $\beta > 0$

- 平方根関数の unwrapping

$$\begin{aligned}\gamma l &= -\ln(e^{-\gamma l}) \\ &= \alpha l + j\beta l\end{aligned}$$

- $\alpha l = \Re(\gamma l)$ (in Nepers)

$$\alpha l = \Re(\gamma l) \times \frac{20}{\ln 10} \simeq \Re(\gamma l) \times 8.686 \quad (\text{in dB})$$

- ### ▼ $\beta l = \Im(\gamma l)$ (in rad)

$$\beta l = \Im(\gamma l) \times \frac{360}{2\pi} \quad (\text{in degrees})$$

- $\ln(z)$ の虚部は unwrapping が必要



▼ THRUとLINEの測定結果から求めるなら

- TRL系の de-embedding で求める

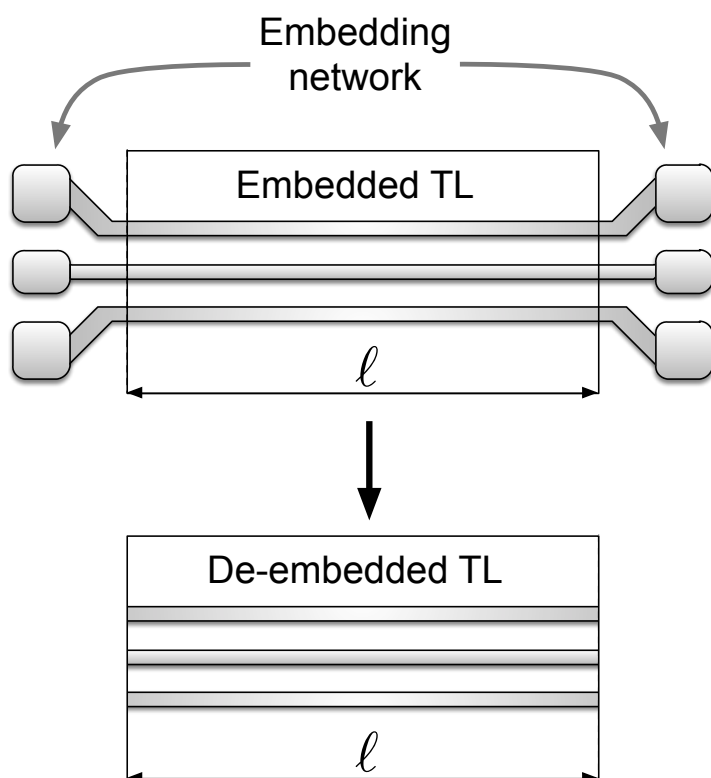
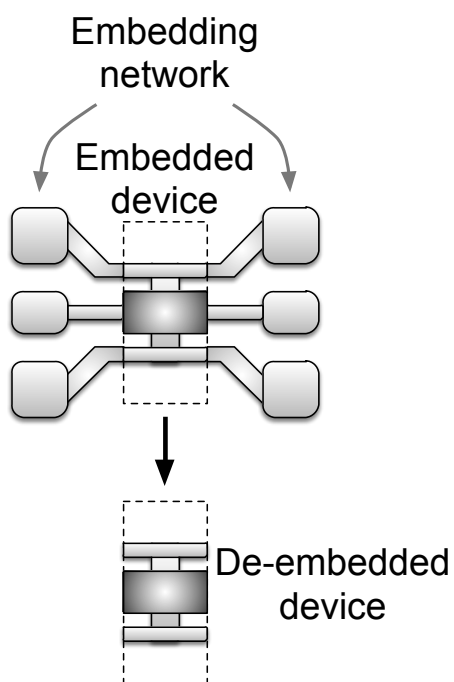
De-embedding

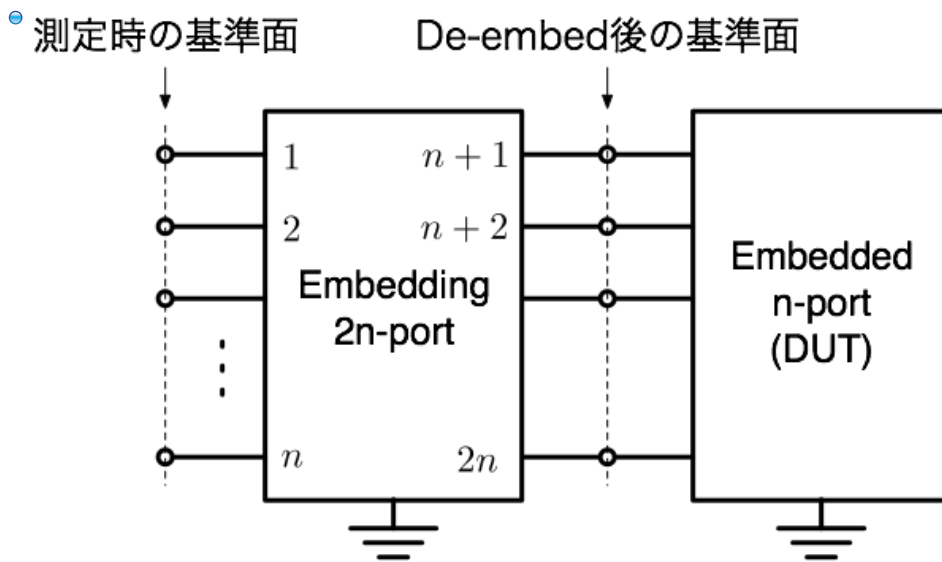
• De-embedding と unterminating	134
• De-embeddingの定式化	137
• Self-calibration	144
• 対称TSD (thru-line, TL)	145
• 対称TMS (thru-match, TM)	153
• TSD (thru-short-delay)	156
• TRL (thru-reflect-line)	163

De-embedding と unterminating

▼測定対象 (device under test, DUT) が余計なネットワーク (embedding network) の中に埋め込まれていて、embedding network 込みでしか測定できないとする

- 「De-embedding」とは、測定結果に埋め込まれているDUTの特性を「取り出す」こと





- ディエンベッドするとS行列定義の基準面がDUT直近に移る

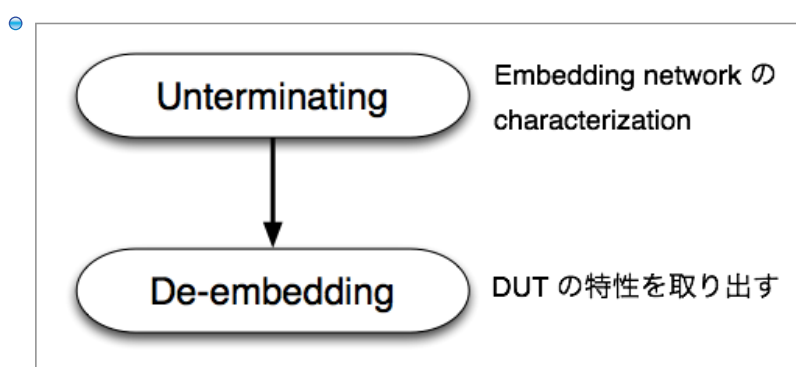
▼ Bauer & Penfield (1974) によると

▼ **De-embedding** is the process of deducing the impedance of a device under test from measurements made at a distance, when the electrical properties of the intervening structure are known.

- The de-embedding procedure is straightforward, provided the embedding network is known.

▼ **Unterminating** is the process of deducing the electrical properties of the intervening structure from a series of measurements with known embedded devices.

- つまり、DUTで終端 (terminate) されている embedding network から DUTを切り離してその特性を同定すること。



- このように本来は2段階の手続きだが、通常は両方をひっくるめて「de-embedding」と呼んでしまうことが多い

▼ 言葉の使い方について

- 「De-embed」の文字どおり意味は「embed（埋め込む）」の反対の操作、つまり「（埋め込まれているものを）取り出す」こと
- したがって、de-embed（他動詞）の目的語は「DUT」
- しかし、「embedding network」を目的語として「de-embed」が使われることもある
- ▼ これは言葉の意味からいって明らかに誤用だが、最近の文献ではしばしば見受けられる
 - ▶ 例：「pad de-embedding」
- 「Unterminate」は最近の文献ではあまりお目にかからなくなっている

▼ 文献

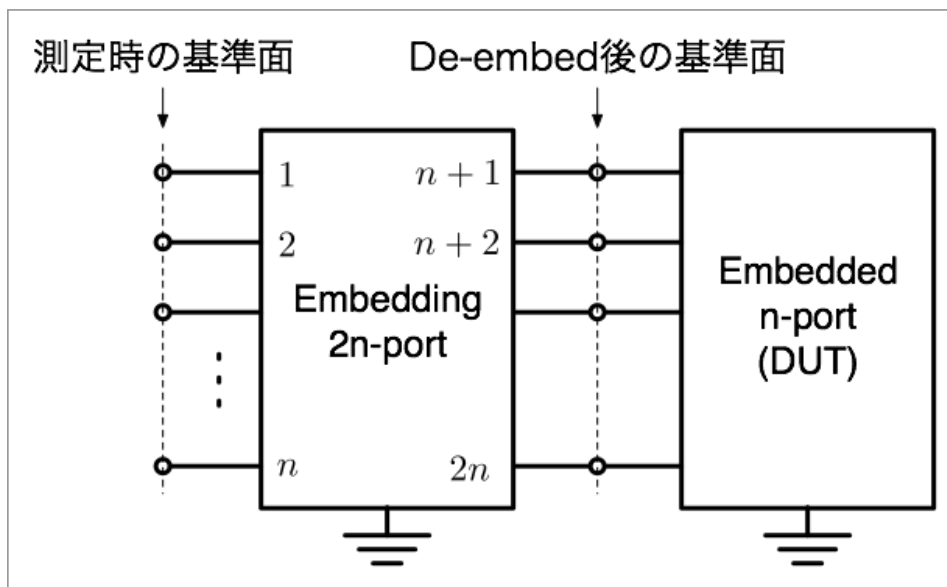
- ◎ • R. F. Bauer and P. Penfield, Jr., "De-embedding and unterminating," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 22, no. 3, pp. 282–288, March 1974.



▶ クイズ

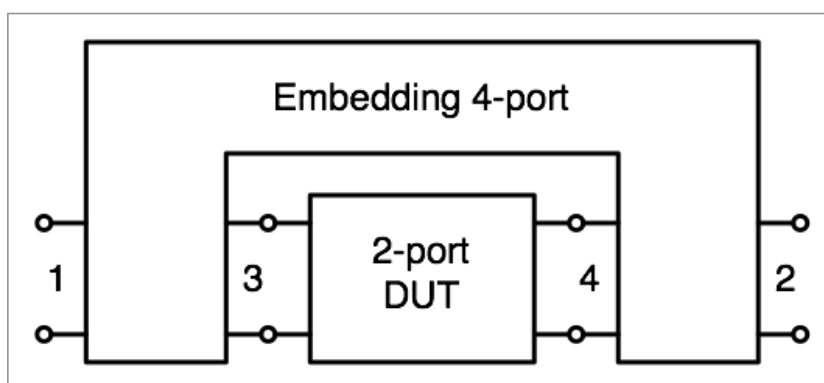
De-embeddingの定式化

▼ n-port の de-embedding の一般的な記述



- この絵はネットワークが共通帰線を持つ書き方になっている
- DUT が n-port なら, embedding network は 2n-port
- 上図が問題の最も一般的な記述だが, 2n-port の特性を決定する (unterminate する) のは容易ではないので, 普通はなんらかの仮定を設けて未知数を減らして定式化する

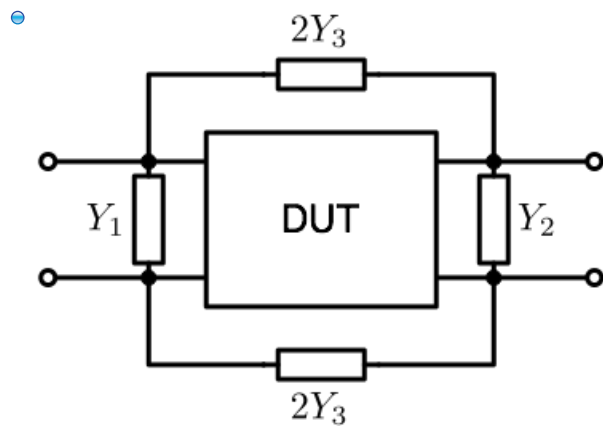
▼ 2-port の場合の一般的な記述



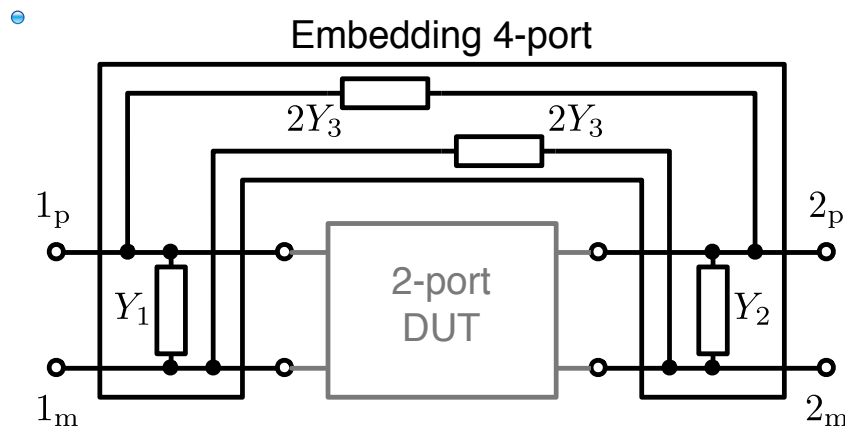
- この絵は共通帰線を持たない書き方
- この書き方のほうが実際の回路レイアウトとの対応がいい
- これを単純化して 2-port の de-embedding を定式化する

▼ Y de-embedding (open de-embedding)

- ▼ Embedding network が下図の形と仮定



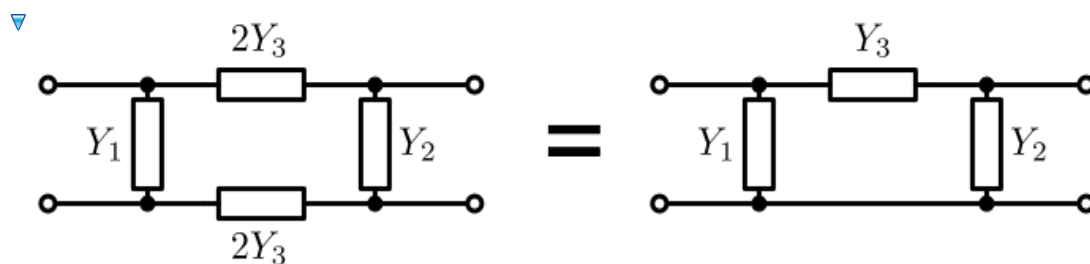
▽ Embedding 4-port で「ポート1=ポート3」「ポート2=ポート4」としたことに相当し，結局 embedding network は 2ポート



- つまり，DUT と embedding network が「並列接続」されてる

- 測定値： $Y_X = Y_{\text{embed}} + Y_{\text{DUT}}$

▽
$$Y_{\text{embed}} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$



- 左の表現のほうが実際の回路レイアウトとの対応がつけやすい

- DUT をオープン $Y_{\text{open}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ で置き換えた基準試料を測定すれば Y_{embed} を決定できる.

- $Y_{\text{DUT}} = Y_X - Y_{\text{embed}}$ でデリエMBED完了.

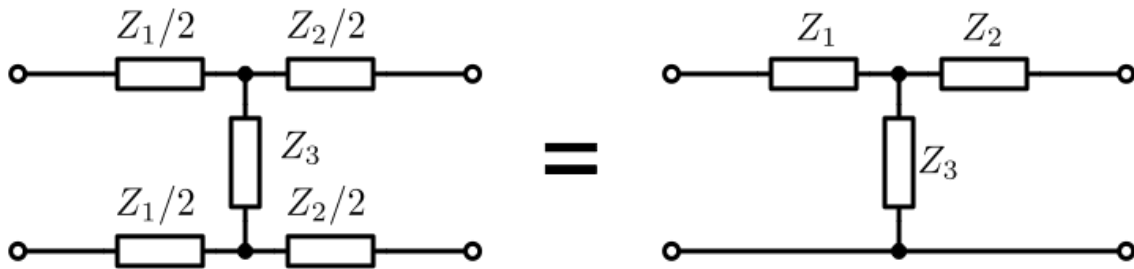
▽ 誤差要因

- 実際の OPEN は容量性を示すので，これが誤差要因となり，周波数が高くなると精度が悪くなる

▼ Z de-embedding (short de-embedding)

- 同じく embedding network は 2-port で, Y de-embedding と双対な関係にある
- DUT と embedding network が「直列接続」されてる
- 測定値: $Z_X = Z_{\text{embed}} + Z_{\text{DUT}}$

$$Z_{\text{embed}} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$



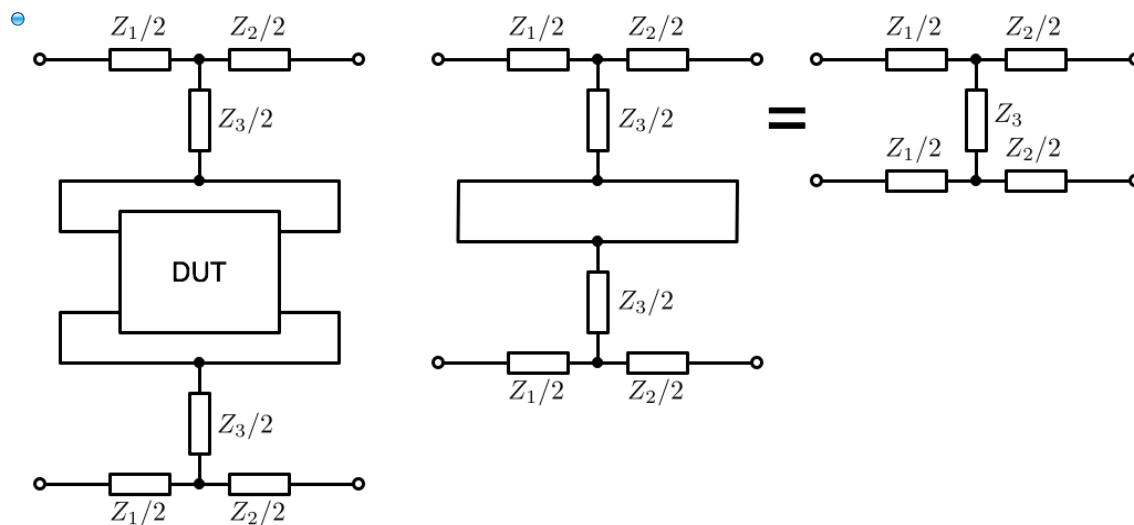
- DUT をショート $Z_{\text{short}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ で置き換えた基準試料を測定すれば Z_{embed} を決定できる.
- $Z_{\text{DUT}} = Z_X - Z_{\text{embed}}$ でデリエMBED完了.

▼ 誤差要因

- 実際の SHORT は誘導性を示すので, これが誤差要因となり, 周波数が高くなると精度が悪くなる

▼ クイズ

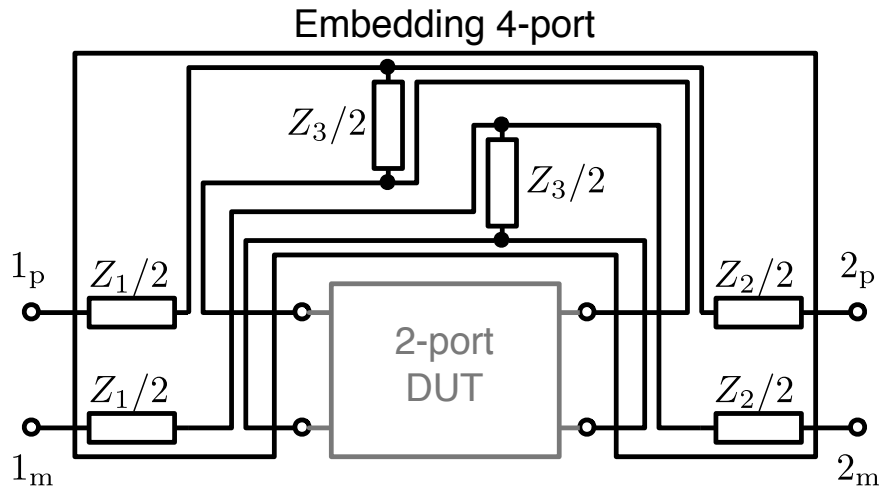
▼ 1. ▼ DUT と embedding network の接続関係は?



- 上記は一例で, 実際にDUT周りにどのようにインピーダンスが入るかは場合による

▼2. ▼Embedding 4-port による一般的な記述との対応関係は？

-

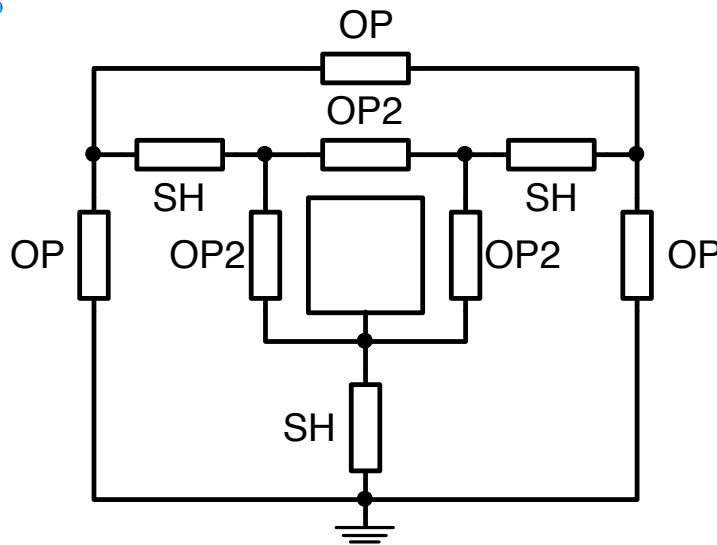


▼Y・Z de-embedding に関する補足

▼Y de-embedding と Z de-embedding を組み合わせると， open-short de-embedding や short-open de-embedding になる.

▼例：Y-Z-Y de-embedding

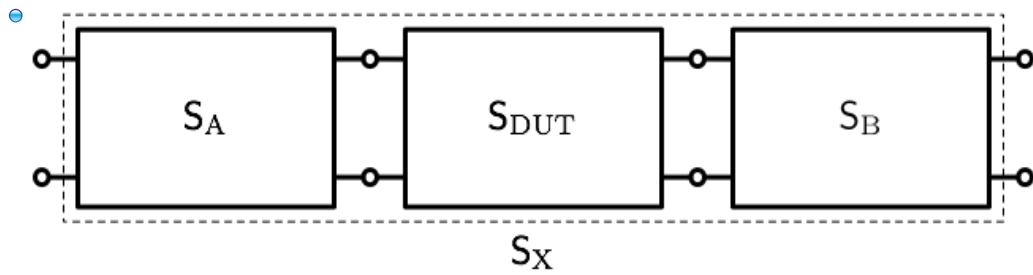
-



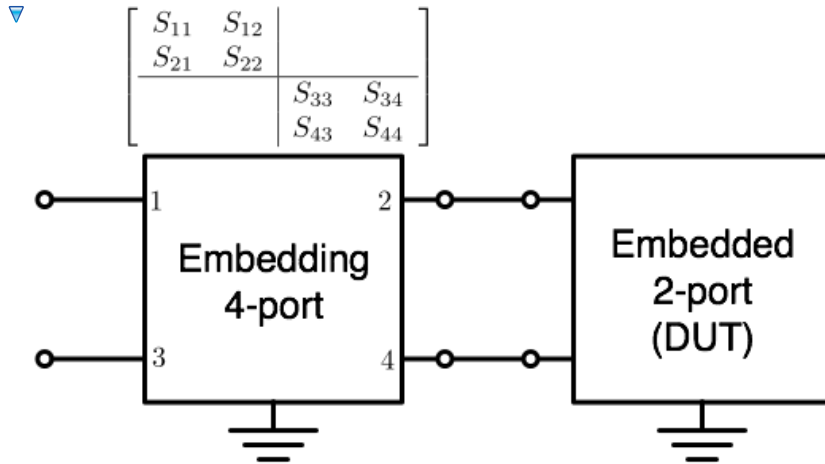
• これらの手法ではS行列からイミッタンスを算出する際に， VNA のキャリブレーションで設定された基準インピーダンス Z_{ref} を使う．結果的に，新たな基準面の基準インピーダンスも Z_{ref} になる.

▼Cascade de-embedding

▼Embedding network が縦続接続された2つの 2-port で表せると仮定



これは、embedding 4-port のS行列が下記のようなブロック対角と仮定したことに相当する



ただしポートの番号の振り方を変えてあるので注意

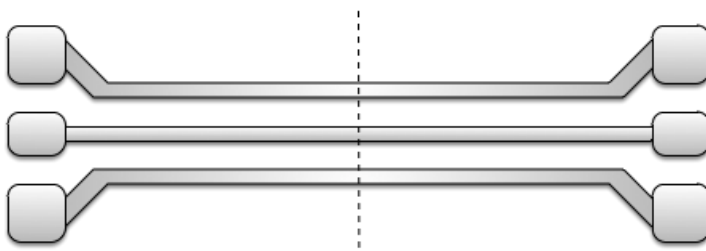
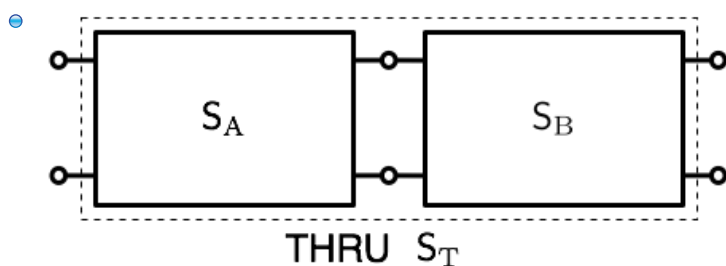
測定値： $T_X = T_A T_{DUT} T_B$

$T_{DUT} = T_A^{-1} T_X T_B^{-1}$

T_A と T_B の決め方にはいくつか考え方がある

THRU 試料

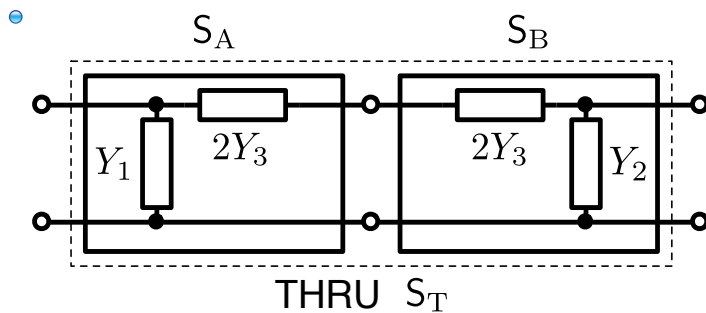
DUT 抜きでエンベディング2ポートを直結した試料を「THRU」と呼ぶ



- カスケードディエンベディングでは、測定結果からAとB（THRU の左半分と右半分）の特性を求める必要がある

▼ Cascade de-embedding の定式化

▼ 1. THRU をΠ型で表現した場合



- AとBそれぞれが持つ自由度は複素数2つ

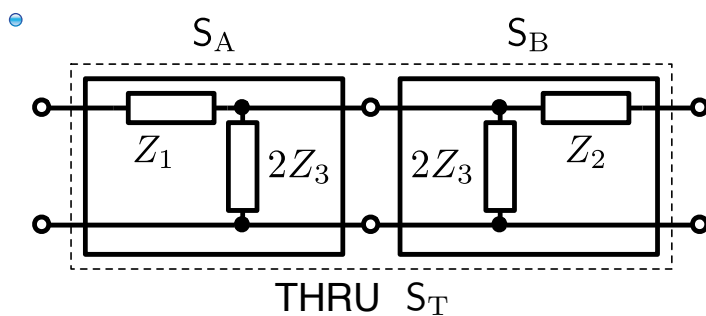
▼ THRU の測定結果だけからAとBのY行列を決定できる

$$Y_{A,\Pi} = \begin{bmatrix} Y_1 + 2Y_3 & -2Y_3 \\ -2Y_3 & 2Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{T11} - Y_{T21} & 2Y_{T21} \\ 2Y_{T21} & -2Y_{T21} \end{bmatrix}$$

$$Y_{B,\Pi} = \begin{bmatrix} 2Y_3 & -2Y_3 \\ -2Y_3 & Y_2 + 2Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2Y_{T21} & 2Y_{T21} \\ 2Y_{T21} & Y_{T22} - Y_{T21} \end{bmatrix}$$

- 2-port の自由度は複素数3～4つなので、これでは実際のAとBを正しく表現できない可能性がある

▼ 2. THRU をT型で表現した場合



- AとBそれぞれが持つ自由度は複素数2つ

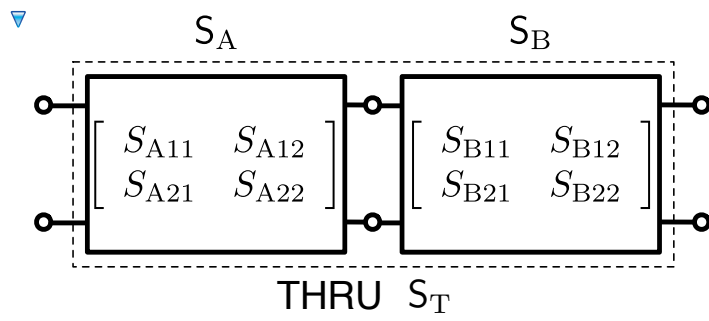
▼ THRU の測定結果だけからAとBのZ行列を決定できる

$$Z_{A,T} = \begin{bmatrix} Z_1 + 2Z_3 & 2Z_3 \\ 2Z_3 & 2Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{T11} + Z_{T21} & 2Z_{T21} \\ 2Z_{T21} & 2Z_{T21} \end{bmatrix}$$

$$Z_{B,T} = \begin{bmatrix} 2Z_3 & 2Z_3 \\ 2Z_3 & Z_2 + 2Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Z_{T21} & 2Z_{T21} \\ 2Z_{T21} & Z_{T22} + Z_{T21} \end{bmatrix}$$

- Π型と同じく、実際のAとBを正しく表現できない可能性がある

▼ 3. 特に仮定を設けずに表現した場合



- ▶ AとBあわせて複素数（実質）7つ分の自由度がある
- 具体的な計算法としてはTSDやTRL等がある

●

Self-calibration

▼ 通常の calibration/de-embedding

- Unterminating に使う基準試料の特性が、あらかじめ正確にわかっていなければならない

◎ ▼ Self-calibration

- 基準試料の特性が一部未知でもかまわない
- Calibration の計算により、未知だった基準試料の特性も決定される

▼ Self-calibration の例

▼ SOLR (short-open-load-reciprocal thru)

- Reciprocal THRU の特性が完全にわかってなくてもいい

▼ TSD (thru-short-delay)

- 伝送線路の伝搬定数 γ が未知でもいい

▼ TRL (thru-reflect-line)

- 伝送線路の伝搬定数 γ が未知でもいい
- REFLECT の反射係数が完全にわかってなくてもいい

対称TSD (thru-line, TL)

▼まえおき

- ▶ LINE を用いる TRL 系の self-calibration/de-embedding のうちでおそらく最も単純なのが、ここで説明する「対称TSD」
- ⑥ ▼ TRL (thru-reflect-line) のもとになった TSD (thru-short-delay) で左右対称を仮定して、SHORTを不用にしたものと考えることができる
 - THRU と LINEしか使わないので「TL (thru-line)」と呼んでもいい
 - この仮定のため、使える場面は限定されるが、単純なので TRL 系の考え方を学ぶのにはいい

▼使う基準試料

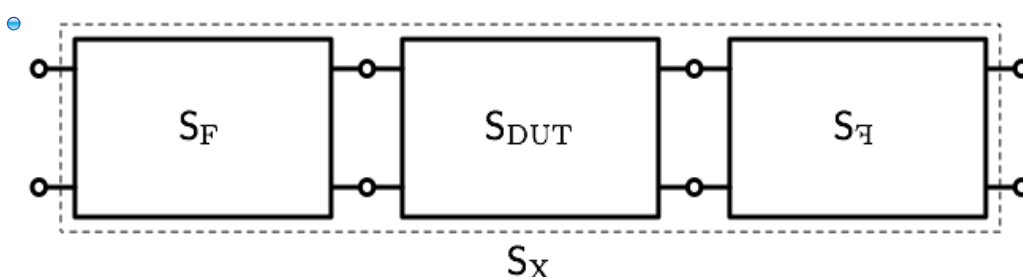
- 1. 左右対称 THRU
- 2. 左右対称 LINE (or DELAY)

▼TRLと共通の特徴

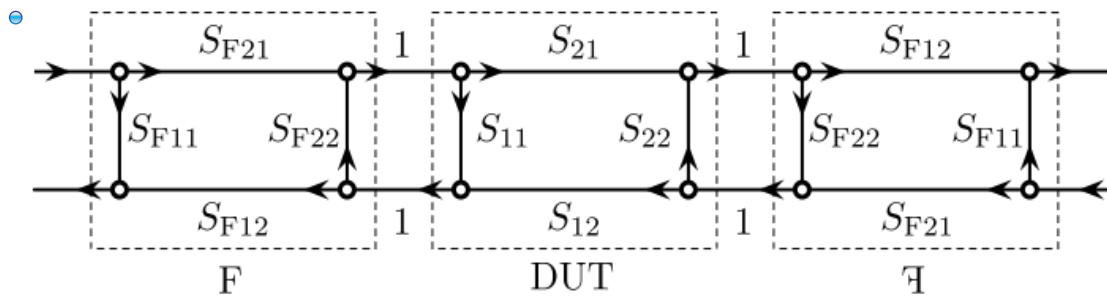
- Embedding network は DUT (device under test) の各ポートに縦続接続された 2-port
- ⑥ ◦ 計算完了後に設定される新たな測定基準面の基準インピーダンスは、LINE を構成する伝送線路の特性インピーダンスになる
- LINE を構成する伝送線路の伝搬定数を決定できる
- この伝送線路の特性インピーダンスは決定できない
- 適用可能な周波数範囲が「LINE と THRU の長さの差」で決まる

▼仮定

- ▼ 1. 接続関係を下図のように表せる



- ▼ 2. Embedding network は左右対称



以上が成り立つなら, S_F を決定できれば測定値 S_X から S_{DUT} を de-embed できる

$$T_{DUT} = T_F^{-1} T_X T_Q^{-1}$$

Embedding network が左右対称なら SHORT は不用

- 理由: THRU が左右対称なら, 二等分定理により THRU の測定結果から SHORT の特性が計算できるから

対称 THRU

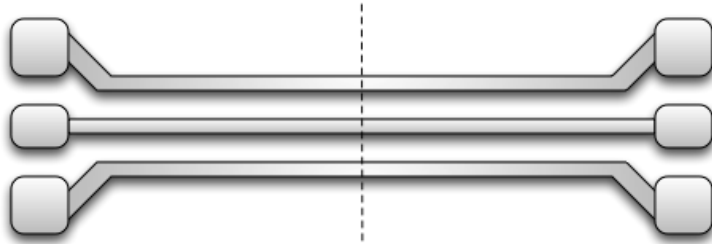
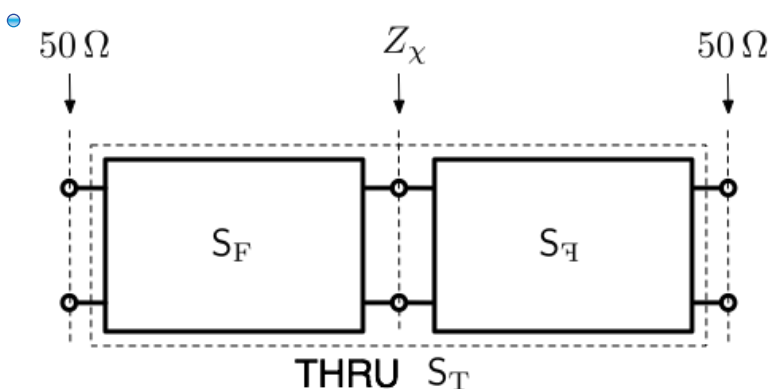
THRU の役割は, S行列定義の新たな基準面 (reference plane) を設定すること

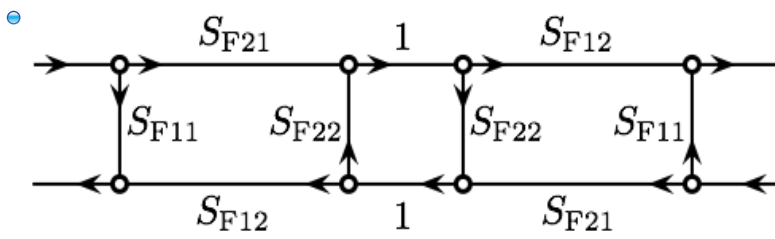
校正完了後の基準面は THRU の中点になる

THRU の真ん中付近は, LINE に含まれるのと同じ伝送線路になっているのが望ましい

理由1: 波の立ち方が同様のほうがいいから

- 理由2: THRU が短すぎると embedding 4-port のS行列がブロック対角だとみなせなくなる可能性がある





- $$S_F(Z_{\text{ref1}}) \triangleq \begin{bmatrix} S_{F11} & S_{F12} \\ S_{F21} & S_{F22} \end{bmatrix}$$

$$S_{\overline{F}}(Z_{\text{ref2}}) = \overline{S_F(Z_{\text{ref1}})} = S_{\overline{F}}(\overline{Z_{\text{ref1}}}) = \begin{bmatrix} S_{F22} & S_{F21} \\ S_{F12} & S_{F11} \end{bmatrix}$$

- Overline は左右反転操作を表す

- $$Z_{\text{ref1}} \triangleq \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & Z_x \end{bmatrix}, \quad Z_{\text{ref2}} = \overline{Z_{\text{ref1}}} = \begin{bmatrix} Z_x & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

- Z_x は伝送線路の特性インピーダンス

- 50Ω は VNA 校正で設定した (現在の測定基準面の) 基準抵抗

- $$T_{T(50\Omega)} = T_{F(Z_{\text{ref1}})} T_{\overline{F}}(Z_{\text{ref2}})$$

$$= \frac{1}{S_{F21} S_{F12}} \begin{bmatrix} 1 - S_{F22}^2 & -S_{F11} + S_{F22} \det S_F \\ S_{F11} - S_{F22} \det S_F & -S_{F11}^2 + (\det S_F)^2 \end{bmatrix}$$

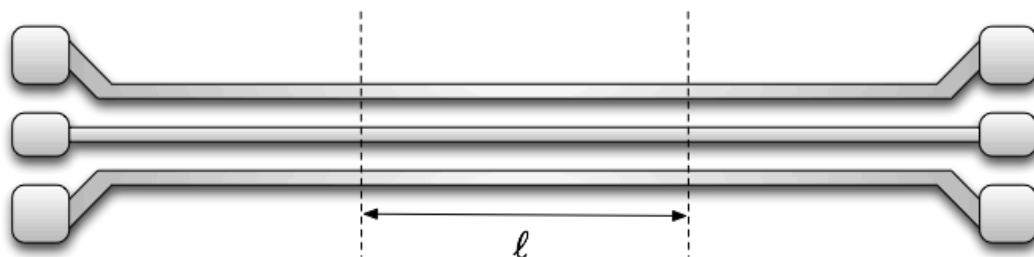
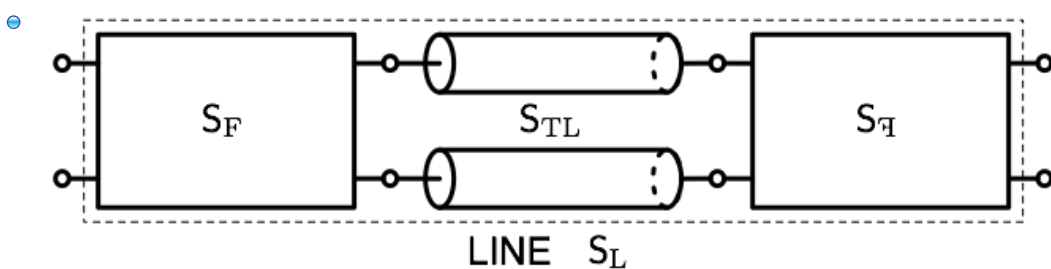
- T行列同士の間での基準インピーダンスは Z_x で一致している

- $$S_{T(50\Omega)} = \begin{bmatrix} S_{T11} & S_{T21} \\ S_{T21} & S_{T11} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値}$$

$$= \frac{1}{1 - S_{F22}^2} \begin{bmatrix} S_{F11} - S_{F22} \det S_F & S_{F12} S_{F21} \\ S_{F12} S_{F21} & S_{F11} - S_{F22} \det S_F \end{bmatrix}$$

対称 LINE

- LINE の役割は新たな基準面の基準インピーダンスを設定すること



- THRU の真ん中に長さ l の伝送線路を加えたもの

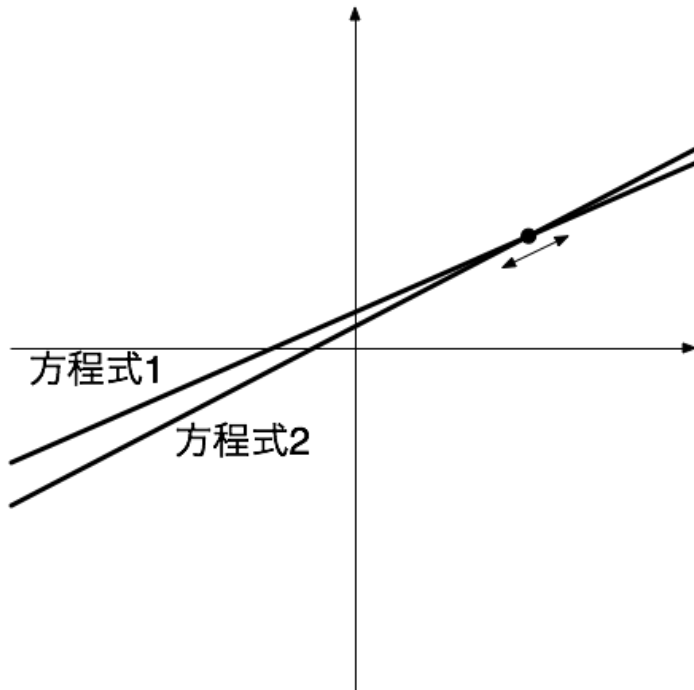
▽ ℓ が半波長の整数倍付近 (lossless の場合 $\pm 20^\circ$ 程度以内) だとまずい.

▽理由

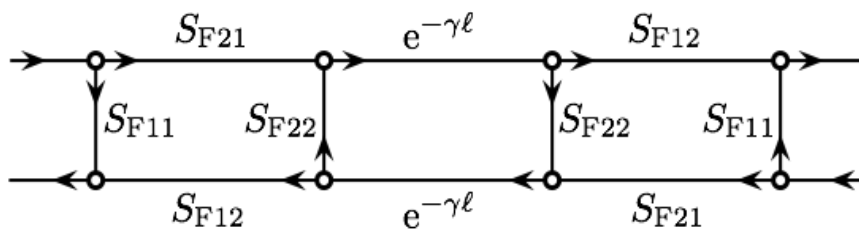
▶半波長の低損失線路は (周波数領域では) 「ないのと同じ」

▽LINE の線路長 ℓ が半波長の整数倍 (付近) だと?

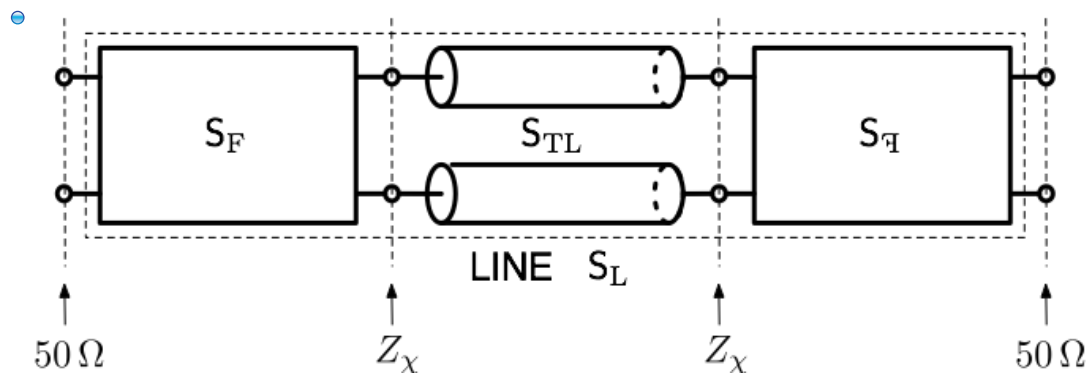
- 解こうとしてる問題は, 未知数が複数ある連立方程式
- 線路長 ℓ が半波長の整数倍だと, 連立方程式が一次独立じゃなくなる
- ℓ が半波長の整数倍に近いと, 下図のように一次従属に近くなって測定の不確かさが増幅され易い



$\ell = \frac{\lambda_g}{4} + \frac{n\lambda_g}{2}$ となる中心周波数 (角度にして $\frac{\pi}{2} + n\pi$) を f_c とすると, 使える 20° から 160° に対応するのは $0.23f_c < f < 1.77f_c$



▽基準インピーダンス



$$S_{TL}(Z_x) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma\ell} \\ e^{-\gamma\ell} & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{TL}(Z_x) = \begin{bmatrix} e^{\gamma\ell} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma\ell} \end{bmatrix}$$

- S_{TL} の対角成分が0になるように、基準インピーダンスを伝送線路の特性インピーダンス Z_x にしてある
- 校正完了後設定される新たな基準面の基準インピーダンスは Z_x
- Z_x の値が不明でも TSD の計算はできるが、 Z_x の値を決定することはできない
- $e^{-\gamma\ell}$ は未知数だが、TSD で値を決定できる

$$T_{L(50\Omega)} = T_F(Z_{ref1}) T_{TL}(Z_x) T_T(Z_{ref2})$$

$$= \frac{1}{S_{F21} S_{F12}} \begin{bmatrix} e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell} & -S_{F11} e^{\gamma\ell} + S_{F22} (\det S_F) e^{-\gamma\ell} \\ S_{F11} e^{\gamma\ell} - S_{F22} (\det S_F) e^{-\gamma\ell} & -S_{F11}^2 e^{\gamma\ell} + (\det S_F)^2 e^{-\gamma\ell} \end{bmatrix}$$

$$S_{L(50\Omega)} = \begin{bmatrix} S_{L11} & S_{L21} \\ S_{L21} & S_{L11} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値}$$

$$= \frac{1}{e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell}} \begin{bmatrix} S_{F11} e^{\gamma\ell} - S_{F22} (\det S_F) e^{-\gamma\ell} & S_{F12} S_{F21} \\ S_{F12} S_{F21} & S_{F11} e^{\gamma\ell} - S_{F22} (\det S_F) e^{-\gamma\ell} \end{bmatrix}$$

解

- 未知数は $e^{-\gamma\ell}$, S_{F11} , S_{F22} , $S_{F12} S_{F21}$ の4つ
- S_T と S_L の測定結果から以下を得る

$$e^{-\gamma\ell} = \frac{-(S_{T11} - S_{L11})^2 + S_{T21}^2 + S_{L21}^2 \pm \sqrt{[(S_{T11} - S_{L11})^2 - S_{T21}^2 - S_{L21}^2]^2 - 4S_{T21}^2 S_{L21}^2}}{2S_{T21} S_{L21}}$$

- α , β ($\gamma = \alpha + j\beta$) の符号が正しくなるように根を選ぶ

$$S_{F22} = \frac{S_{T11} - S_{L11}}{S_{T21} - S_{L21}e^{-\gamma\ell}}$$

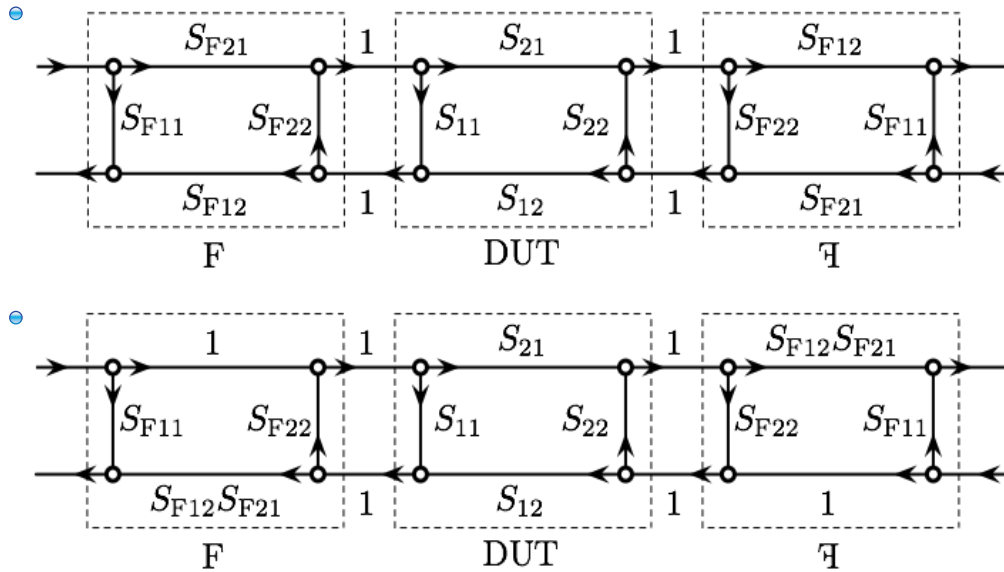
$$S_{F11} = S_{T11} - S_{F22}S_{T21}$$

$$S_{F21}S_{F12} = S_{T21}(1 - S_{F22}^2)$$

▼ S_{F21} と S_{F12} は分離できないが, de-embedding だけが目的ならそれでかまわない.

▼理由:

▼以下の2つのシグナルフローグラフは測定で区別できない



●だから最初から下のを想定してもいい

▼導出

▼THRU の測定値 S_{T21} より

$$S_{F12}S_{F21} = S_{T21}(1 - S_{F22}^2)$$

これで $S_{F12}S_{F21}$ を消す

▼THRU の測定値 S_{T11} より

$$\begin{aligned} S_{T11}(1 - S_{F22}^2) &= S_{F11} - S_{F22} \det S_F \\ &= S_{F11} - S_{F22}(S_{F11}S_{F22} - S_{F12}S_{F21}) \\ &= S_{F11}(1 - S_{F22}^2) + S_{F22}S_{T21}(1 - S_{F22}^2) \\ S_{T11} &= S_{F11} + S_{F22}S_{T21} \end{aligned}$$

$$S_{F11} = S_{T11} - S_{F22}S_{T21}$$

これで S_{F11} を消す

▼LINE の測定値 S_{L21} より

$$\begin{aligned} S_{L21}(e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2e^{-\gamma\ell}) &= S_{F12}S_{F21} \\ &= S_{T21}(1 - S_{F22}^2) \end{aligned}$$

$$\triangleright e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell} = \frac{S_{T21}(1 - S_{F22}^2)}{S_{L21}} \quad (1)$$

▽ LINE の測定値 S_{L11} より

$$\begin{aligned} \bullet S_{L11}(e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell}) &= S_{F11}e^{\gamma\ell} - S_{F22}(\det S_F)e^{-\gamma\ell} \\ &= S_{F11}e^{\gamma\ell} - S_{F22}[S_{F11}S_{F22} - S_{T21}(1 - S_{F22}^2)]e^{-\gamma\ell} \\ &= S_{F11}(e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell}) + S_{F22}S_{T21}(1 - S_{F22}^2)e^{-\gamma\ell} \quad (2) \\ &= (S_{T11} - S_{F22}S_{T21})(e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell}) + S_{F22}S_{T21}(1 - S_{F22}^2)e^{-\gamma\ell} \\ &= S_{T11}(e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell}) - S_{F22}S_{T21}(e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \therefore (S_{T11} - S_{L11})(e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell}) - S_{T21}S_{F22}(e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}) &= 0 \\ (S_{T11} - S_{L11})(1 - S_{F22}^2 e^{-2\gamma\ell}) - S_{T21}S_{F22}(1 - e^{-2\gamma\ell}) &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

• (2) より

$$(S_{L11} - S_{T11} + S_{F22}S_{T21})(e^{\gamma\ell} - S_{F22}^2 e^{-\gamma\ell}) = S_{T21}S_{F22}(1 - S_{F22}^2)e^{-\gamma\ell}$$

• (1) を代入すると

$$(S_{L11} - S_{T11} + S_{F22}S_{T21})S_{T21}(1 - S_{F22}^2) = S_{L21}S_{F22}S_{T21}(1 - S_{F22}^2)e^{-\gamma\ell}$$

$$(S_{L11} - S_{T11} + S_{F22}S_{T21}) = S_{L21}S_{F22}e^{-\gamma\ell}$$

$$S_{F22}(S_{T21} - S_{L21}e^{-\gamma\ell}) = S_{T11} - S_{L11}$$

$$\boxed{S_{F22} = \frac{S_{T11} - S_{L11}}{S_{T21} - S_{L21}e^{-\gamma\ell}}}$$

▽ (3) に代入して S_{F22} を消すと

$$\bullet S_{T21}S_{L21}e^{-2\gamma\ell} + \left[(S_{T11} - S_{L11})^2 - S_{T21}^2 - S_{L21}^2 \right] e^{-\gamma\ell} + S_{T21}S_{L21} = 0$$

$$\bullet \therefore e^{-\gamma\ell} = \frac{-(S_{T11} - S_{L11})^2 + S_{T21}^2 + S_{L21}^2 \pm \sqrt{[(S_{T11} - S_{L11})^2 - S_{T21}^2 - S_{L21}^2]^2 - 4S_{T21}^2 S_{L21}^2}}{2S_{T21}S_{L21}}$$

▽ 特性インピーダンス

• 伝送線路の特性インピーダンス Z_x は、なんらかの方法で推定しなければならない

▽ 基準インピーダンス行列の変更の必要性

• TSD で de-embed して出てくる S 行列の基準インピーダンス行列は

$$Z_{\text{ref, TSD}} = \begin{bmatrix} Z_x & 0 \\ 0 & Z_x \end{bmatrix}.$$

S_F のポート 2 の基準インピーダンスも Z_x .

- このままでは不便だから、基準インピーダンス行列を

$$Z_{\text{ref,VNA}} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \text{に変更すると扱いやすくなる.}$$

- 基準インピーダンス行列変更前に S_F が対称行列になるようにしてあっても、基準インピーダンス変更後は S_F は非対称行列になる

▼補足

- TRLの親戚で、式の導出が圧倒的に楽なのは、「LINE」の代わりに「MATCH」を使う方法である「対称TMS（またはTM）」
 - ただ、インピーダンスがよくわかっている MATCH を実際に作るのは難しく、実用しにくいところがある
 - それに対して LINE は作り易く、特性インピーダンスも（周波数が低すぎなければ）比較的推定しやすい

▼▼基準抵抗を50Ωに変換後に S_F が対称行列になるようにするには？

$$T_{X(50\Omega)} = T_{F(50\Omega, Z_x)} T_{DUT(Z_x)} T_{q(Z_x, 50\Omega)} = \frac{1}{\eta} T_{F(50\Omega, Z_x)} \cdot T_{DUT(Z_x)} \cdot \eta T_{q(Z_x, 50\Omega)}$$

$$T_{T(50\Omega)} = T_{F(50\Omega, Z_x)} T_{q(Z_x, 50\Omega)}$$

- η には任意性がある。 η を適切に選ぶと S_F が対称行列になる
- $\frac{S_{F12(50\Omega)}}{S_{F21(50\Omega)}} = \det T_{F(50\Omega)} = \det \left(\frac{1}{\eta} T_{F(Z_x)} \right) = 1$

- THRUは仮定により左右対称だから $\det T_T = 1$

$$\det T_{T(Z_x)} = \det T_{F(Z_x)} \cdot \det T_{q(Z_x)} = 1$$

$$\det \left(\frac{1}{\eta} T_{F(Z_x)} \right) = \frac{T_{11} T_{22}}{\eta \eta} - \frac{T_{12} T_{21}}{\eta \eta} = \frac{\det T_{F(Z_x)}}{\eta^2} = 1$$

となるように η を選ぶ.

- $\therefore \eta = (\det T_F)^{1/2}$ として,

$\left(\frac{1}{\eta} T_F \right)$ を改めて T_F とすればいい.

▶クイズ

対称TMS (thru-match, TM)

▼まえおき

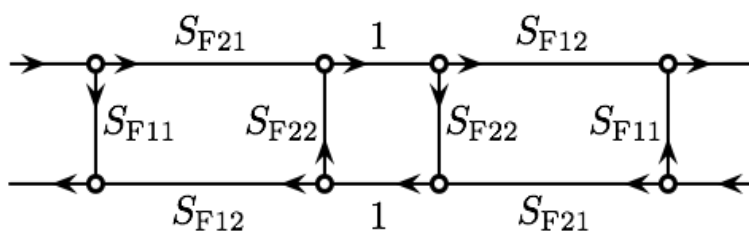
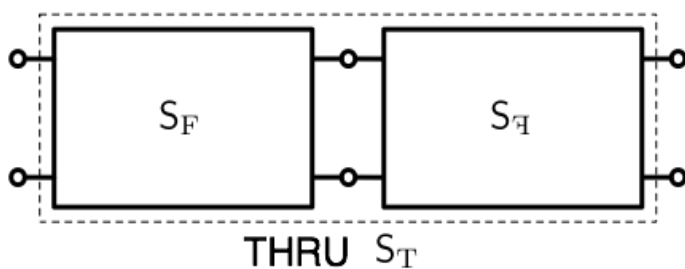
- TRL/LRM 系の self-calibration/de-embedding でもっとも単純なのが対称 TMS (thru-match-short)
- ⑥ ▼前出の「対称TSD (またはTL)」で使っていた LINE を、特性が既知のインピーダンスで終端された「MATCH」に置き換えたものに相当し、式の導出はこちらのほうが簡単
 - THRU と MATCHしか使わないので「TM (thru-match)」と呼んでもいい
 - 特性のよくわかっている MATCH を実験的に実現するのは LINE とくらべて難しいので、実際に使うには工夫がいる

▼使う基準試料

- 1. 左右対称 THRU
- 2. 左右対称 MATCH

▼対称THRU

- THRU の役割は、基準面 (reference plane) を定めること
- 校正完了後の基準面は THRU の中点になる

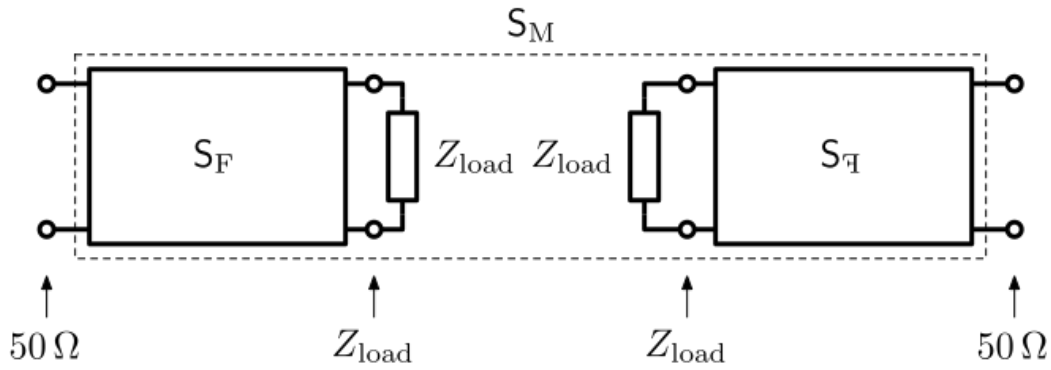


- $$S_{T(50\Omega)} = \begin{bmatrix} S_{T11} & S_{T21} \\ S_{T21} & S_{T11} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値}$$

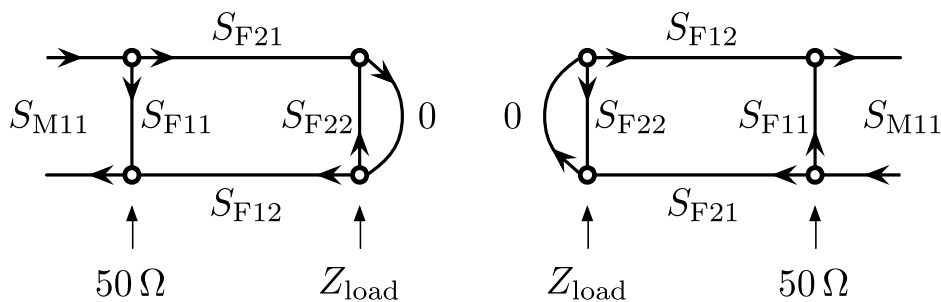
$$= \frac{1}{1 - S_{F22}^2} \begin{bmatrix} S_{F11} - S_{F22} \det S_F & S_{F12} S_{F21} \\ S_{F12} S_{F21} & S_{F11} - S_{F22} \det S_F \end{bmatrix}$$

▽対称MATCH

- MATCH の役割は、校正基準面の基準インピーダンスを与えること



- 校正完了後の基準面の基準インピーダンスは、既知のインピーダンスである Z_{load} にする



- THRU の中点での基準インピーダンスは Z_{load} にすると決めたので、load における反射係数は0

▽ということは、

$$S_{M(50\Omega)} = \begin{bmatrix} S_{F11} & 0 \\ 0 & S_{F11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{M11} & 0 \\ 0 & S_{M11} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値}$$

$$S_{F(Z_{ref1})} \triangleq \begin{bmatrix} S_{F11} & S_{F12} \\ S_{F21} & S_{F22} \end{bmatrix}, Z_{ref1} \triangleq \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & Z_{load} \end{bmatrix}$$

- つまり、MATCH の測定結果から直ちに S_{F11} がわかる

▽解

$$\begin{aligned} S_{F11} &= S_{M11} \\ S_{F22} &= \frac{S_{T11} - S_{F11}}{S_{T21}} \\ S_{F21}S_{F12} &= S_{T21}(1 - S_{F22}^2) \end{aligned}$$

▽導出

- ▽THRU の測定値 S_{T11} より

- $$S_{T11} = \frac{S_{F11} - S_{F22}(S_{F11}S_{F22} - S_{F12}S_{F21})}{(1 - S_{F22}^2)}$$

$$= \frac{S_{F11}(1 - S_{F22}^2) + S_{F22}S_{T21}(1 - S_{F22}^2)}{(1 - S_{F22}^2)}$$

$$= S_{F11} + S_{F22}S_{T21}$$

- $$\therefore S_{F22} = \frac{S_{T11} - S_{F11}}{S_{T21}}$$

▼ THRU の測定値 S_{T21} より

- $$S_{F12}S_{F21} = S_{T21}(1 - S_{F22}^2)$$

▼ 基準インピーダンス行列の変更の必要性

- TMS で de-embed して出てくる S 行列の

基準インピーダンス行列は $Z_{\text{ref,TM}} = \begin{bmatrix} Z_{\text{load}} & 0 \\ 0 & Z_{\text{load}} \end{bmatrix}$.

S_F のポート 2 の基準インピーダンスも Z_{load} .

- $Z_{\text{load}} \neq 50 \Omega$ ならそのままだと不便だから,

基準インピーダンス行列を $Z_{\text{ref,VNA}} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$

に変更すると扱いやすくなる

TSD (thru-short-delay)

▼まえおき

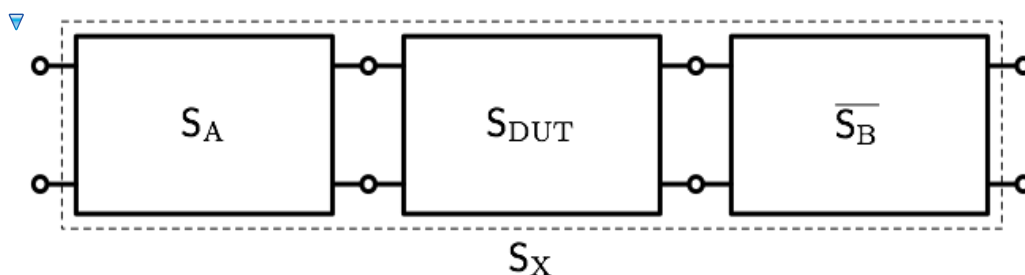
- Embedding network が左右対称でないなら, THRU と LINE のほかに SHORT を使う
- ほかは「対称TSD (またはTL)」 とほぼ同様
- 「8-term モデル (または 7-term モデル)」とか「エラーボックスモデル」とか呼ばれる一連の方法の元祖
- TLS (thru-line-short) と呼ばれることもある
- TSD をもとにして「TRL (thru-reflect-line)」が開発され, その後「LRM (line-reflect-match)」等に発展した
- TRL が登場したため TSD が実際に使われることはほとんどないが, TRL より導出が簡単なので, TRL について学ぶ準備にいい

▼使う基準試料

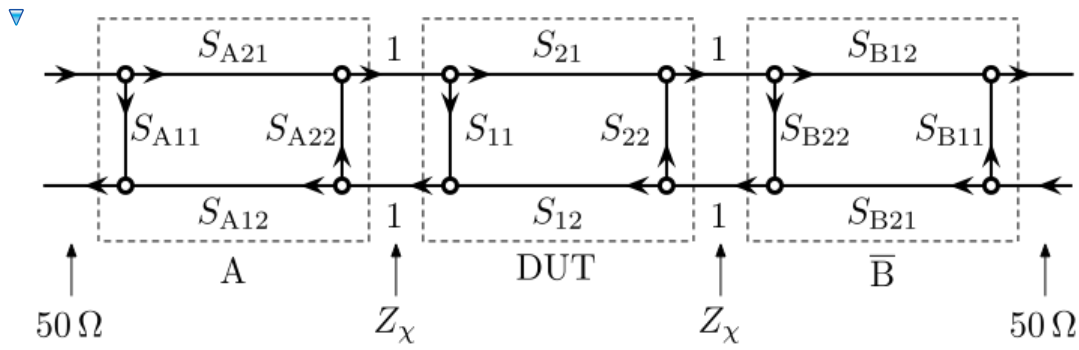
1. THRU
2. LINE (or DELAY)
3. SHORT

▼仮定

- ▼ 1. DUT と embedding network の接続関係を下図のように表せる



- Overline は左右反転操作を表す
- Bを裏返してあるのは, こうすると式の形がAと同じになるから



- 8つのSパラメータがあるが、任意性があるため7つまでしか値を決定できないので、以下では $S_{A21} = 1$ として計算する。

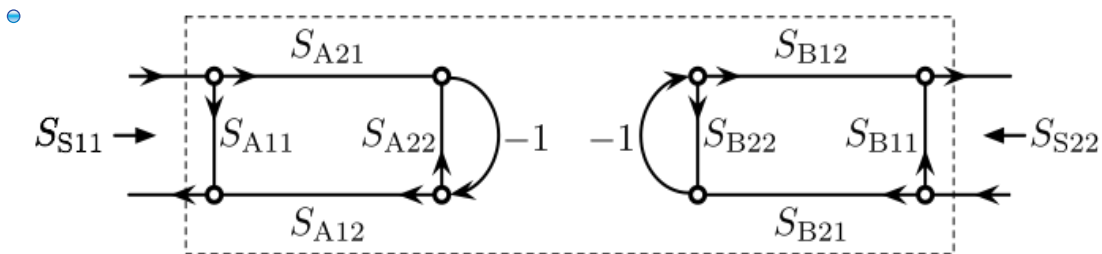
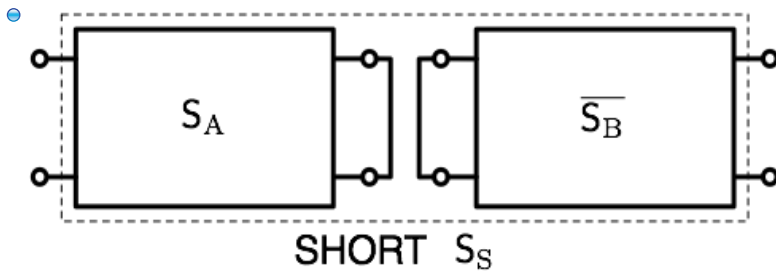
- $$S_{A(z_{ref1})} \triangleq \begin{bmatrix} S_{A11} & S_{A12} \\ 1 & S_{A22} \end{bmatrix}, S_{B(z_{ref1})} \triangleq \begin{bmatrix} S_{B11} & S_{B12} \\ S_{B21} & S_{B22} \end{bmatrix}$$

$$\overline{S_{B(z_{ref1})}} = S_{\overline{B}(z_{ref1})} = \begin{bmatrix} S_{B22} & S_{B21} \\ S_{B12} & S_{B11} \end{bmatrix}$$

$$z_{ref1} \triangleq \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & Z_x \end{bmatrix}, \overline{z_{ref1}} = \begin{bmatrix} Z_x & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

- 2. SHORT の反射係数が既知 (-1)
- 以上が成り立つなら S_A と $\overline{S_B}$ を決定でき、 S_x から S_{DUT} を取り出せる

SHORT



- $$R_{A(z_{ref1})} = \begin{bmatrix} R_{A11} & R_{A12} \\ R_{A21} & R_{A22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{A12} - S_{A11}S_{A22} & S_{A11} \\ -S_{A22} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{B(z_{ref1})} = \begin{bmatrix} R_{B11} & R_{B12} \\ R_{B21} & R_{B22} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{B21}} \begin{bmatrix} S_{B12}S_{B21} - S_{B11}S_{B22} & S_{B11} \\ -S_{B22} & 1 \end{bmatrix}$$

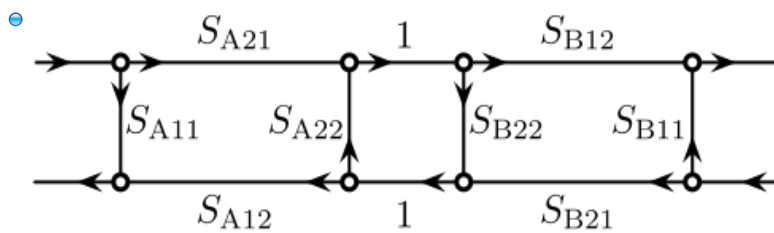
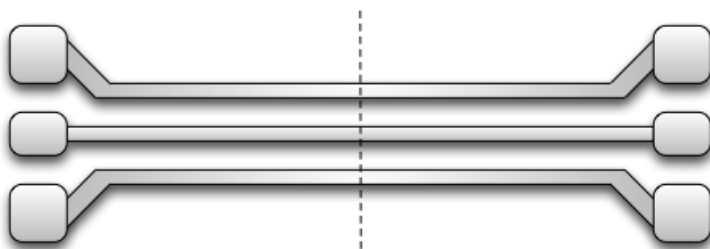
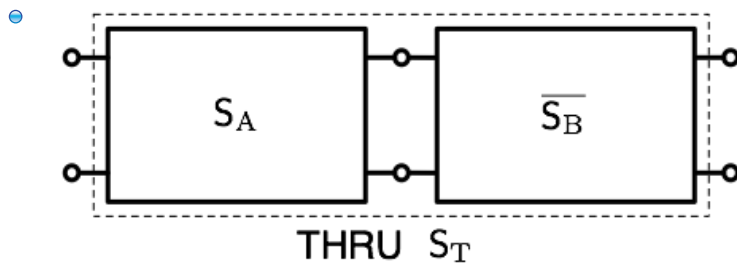
- $$S_{S(50\Omega)} = \begin{bmatrix} S_{S11} & \\ & S_{S22} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値}$$

$$S_{S11} = S_{A11} - \frac{S_{A12}}{1 + S_{A22}} = \frac{S_{A11} + \det S_A}{1 + S_{A22}} = \frac{-R_{A11} + R_{A12}}{-R_{A21} + 1}$$

$$S_{S22} = S_{B11} - \frac{S_{B12}S_{B21}}{1 + S_{B22}} = \frac{S_{B11} + \det S_B}{1 + S_{B22}} = \frac{-R_{B11} + R_{B12}}{-R_{B21} + R_{B22}}$$

THRU

- 校正完了後，S行列定義の基準面は THRU の中点になる

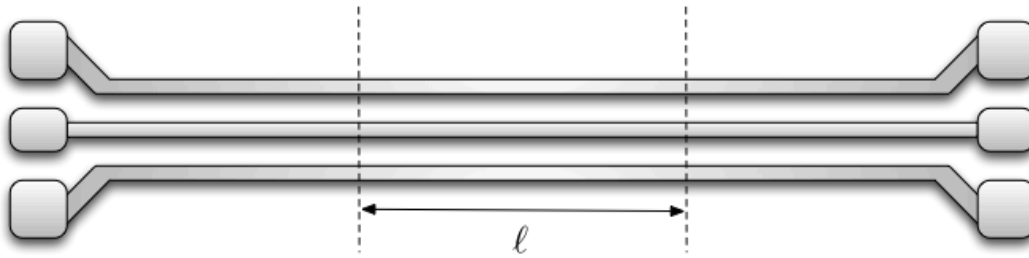
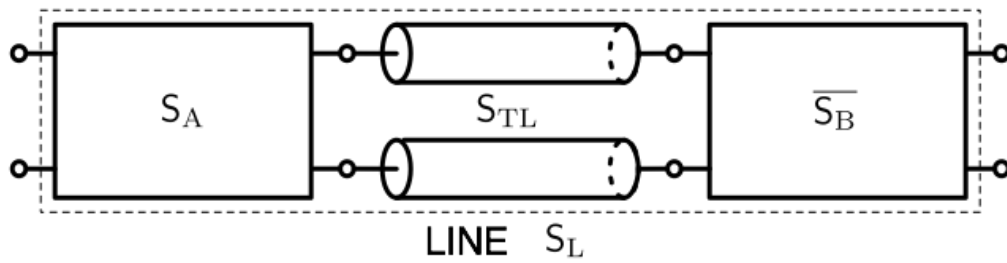


- $$R_{T(50\Omega)} = \begin{bmatrix} R_{T11} & R_{T12} \\ R_{T21} & R_{T22} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値}$$

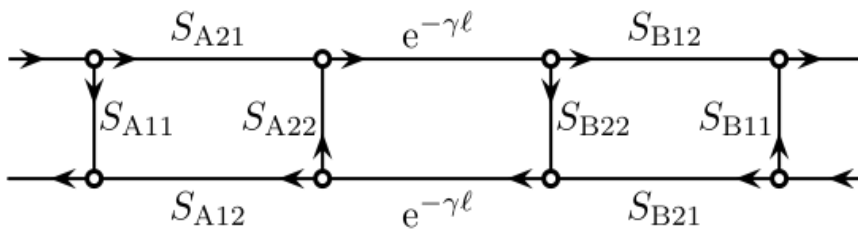
$$= \frac{1}{S_{T21}} \begin{bmatrix} S_{T12}S_{T21} - S_{T11}S_{T22} & S_{T11} \\ -S_{T22} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= R_{A(Z_{ref1})} \overline{R_{B(Z_{ref1})}} = R_{A(Z_{ref1})} T_{B(Z_{ref1})}^{-1}$$

LINE



- THRU の真ん中に長さ l の伝送線路を加えたもの
- l が半波長の整数倍付近 (lossless の場合 $\pm 20^\circ$ 程度) では使えない



- $S_{TL}(z_x) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{bmatrix}$, $R_{TL}(z_x) = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{\gamma l} \end{bmatrix}$ ($= \overline{R_{TL}(z_x)}$)
- $R_L(50\Omega) = \begin{bmatrix} R_{L11} & R_{L12} \\ R_{L21} & R_{L22} \end{bmatrix}$ ← 測定値

$$= \frac{1}{S_{L21}} \begin{bmatrix} S_{L12}S_{L21} - S_{L11}S_{L22} & S_{L11} \\ -S_{L22} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= R_A(z_{ref1}) R_{TL}(z_x) \overline{R_B(z_{ref1})} = R_A(z_{ref1}) R_{TL}(z_x) T_B^{-1}(z_{ref1})$$

▼ 解

- 未知数は γl , S_{A11} , S_{A22} , S_{A12} , S_{B11} , S_{B22} , S_{B12} , S_{B21} の 8 つ

- $R_H \triangleq R_L R_T^{-1} = \begin{bmatrix} R_{H11} & R_{H12} \\ R_{H21} & R_{H22} \end{bmatrix}$ ← 測定値からすぐ出せる

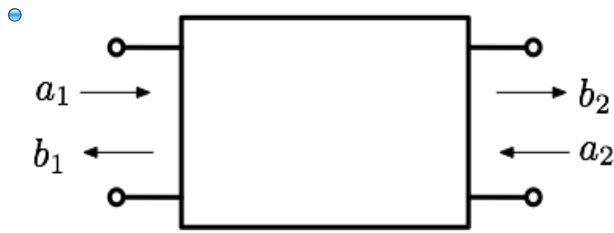
$$\gamma l = \operatorname{arccosh} \left(\frac{R_{H11} + R_{H22}}{2} \right)$$

$$S_{A11} = \frac{-(R_{H22} - R_{H11}) \pm \sqrt{(R_{H22} - R_{H11})^2 + 4R_{H21}R_{H12}}}{2R_{H21}}$$

$$\frac{R_{A11}}{R_{A21}} = \frac{-(R_{H22} - R_{H11}) \mp \sqrt{(R_{H22} - R_{H11})^2 + 4R_{H21}R_{H12}}}{2R_{H21}}$$

ただし $|S_{A11}| < \left| \frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right|$ となるように解を選ぶ

▼ この大小関係はR行列の定義とAの素性を考えればわかる



$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

• A はたとえば「パッド+配線」だから、

$$|R_{A12}| = |S_{A11}/S_{A21}| \ll 1, \quad |R_{A21}| = |-S_{A22}/S_{A21}| \ll 1$$

$$S_{A22} = -\frac{S_{S11} - S_{A11}}{S_{S11} - (R_{A11}/R_{A21})}$$

$$S_{A12} = \left(S_{A11} - \frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right) S_{A22}$$

$$\overline{R}_B = R_A^{-1} R_T \text{ or } T_B = R_T^{-1} R_A$$



▼ 導出

• R行列を使って計算する

• まず γl , R_{A11} , R_{A21} , R_{A12} を求め、それをもとに S_{A11} , S_{A22} , S_{A12} を計算する。

S_A が決まれば S_B は $R_T = R_A \overline{R}_B$ から出せる。

$$\text{▼ } R_H \triangleq R_L R_T^{-1} = R_A R_{TL} \overline{R}_B \overline{R}_B^{-1} R_A^{-1} = R_A R_{TL} R_A^{-1}$$

• つまり, R_H は R_{TL} を R_A で相似変換したもの。

行列のトレースは相似変換で不変だから

$$\text{tr } R_H = \text{tr } R_{TL} = e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}$$

$$\therefore \cosh(\gamma\ell) = \frac{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}}{2} = \frac{1}{2} \text{tr} R_H = \frac{R_{H11} + R_{H22}}{2}$$

$$R_{HA} \triangleq R_H R_A = R_A R_{TL}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{H11} & R_{H12} \\ R_{H21} & R_{H22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{A11} & R_{A12} \\ R_{A21} & R_{A22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{A11} & R_{A12} \\ R_{A21} & R_{A22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma\ell} & 0 \\ 0 & e^{\gamma\ell} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} R_{H11}R_{A11} + R_{H12}R_{A21} & R_{H11}R_{A12} + R_{H12}R_{A22} \\ R_{H21}R_{A11} + R_{H22}R_{A21} & R_{H21}R_{A12} + R_{H22}R_{A22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{A11}e^{-\gamma\ell} & R_{A12}e^{\gamma\ell} \\ R_{A21}e^{-\gamma\ell} & R_{A22}e^{\gamma\ell} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} R_{HA11} & R_{HA12} \\ R_{HA21} & R_{HA22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R_{HA11}}{R_{HA21}} &= \frac{R_{H11}R_{A11} + R_{H12}R_{A21}}{R_{H21}R_{A11} + R_{H22}R_{A21}} = \frac{R_{A11}}{R_{A21}} \\ R_{H11} \left(\frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right) + R_{H12} &= \left(\frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right) \left[R_{H21} \left(\frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right) + R_{H22} \right] \\ R_{H21} \left(\frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right)^2 + (R_{H22} - R_{H11}) \left(\frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right) - R_{H12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R_{HA12}}{R_{HA22}} &= \frac{R_{H11}R_{A12} + R_{H12}R_{A22}}{R_{H21}R_{A12} + R_{H22}R_{A22}} = \frac{R_{A12}}{R_{A22}} \\ R_{H11} \left(\frac{R_{A12}}{R_{A22}} \right) + R_{H12} &= \left(\frac{R_{A12}}{R_{A22}} \right) \left[R_{H21} \left(\frac{R_{A12}}{R_{A22}} \right) + R_{H22} \right] \\ R_{H21} \left(\frac{R_{A12}}{R_{A22}} \right)^2 + (R_{H22} - R_{H11}) \left(\frac{R_{A12}}{R_{A22}} \right) - R_{H12} &= 0 \end{aligned}$$

したがって、 $\frac{R_{A11}}{R_{A21}}$ と $\frac{R_{A12}}{R_{A22}} (= R_{A12})$ は同じ二次方程式の2つの解。

$$\therefore R_{A12}, \frac{R_{A11}}{R_{A21}} = \frac{-(R_{H22} - R_{H11}) \pm \sqrt{(R_{H22} - R_{H11})^2 + 4R_{H21}R_{H12}}}{2R_{H21}}$$

ただし $|R_{A12}| < \left| \frac{R_{A11}}{R_{A21}} \right|$ とする。

SHORT の S_{S11} の式より

$$S_{S11}(-R_{A21} + 1) = -R_{A11} + R_{A12}$$

$$S_{S11} \left(-\frac{R_{A21}}{R_{A11}} \cdot R_{A11} + 1 \right) = -R_{A11} + R_{A12}$$

$$R_{A11} \left(S_{S11} \frac{R_{A21}}{R_{A11}} - 1 \right) = S_{S11} - R_{A12}$$

$$R_{A11} = \frac{S_{S11} - R_{A12}}{S_{S11} (R_{A21}/R_{A11}) - 1} \quad (R_{A12} \text{ は既知})$$

$$R_{A21} = R_{A11} \left(\frac{R_{A21}}{R_{A11}} \right)$$

$$S_A = \begin{bmatrix} R_{A12} & R_{A11} - R_{A12}R_{A21} \\ 1 & -R_{A21} \end{bmatrix}$$

▼補足

- 上では $S_{A21}=1$ と決めて計算したので、 S_A は対称行列にはならない（もし実際のAとBが可逆回路網だったとしても）。したがって、ディエンベディングは可能だが、AとBの行列を实际通りに決定できていないことにはならない。

▼文献

▼TSD に関する最初の論文は以下

- ① • N. R. Franzen and R. A. Speciale, "A new procedure for system calibration and error removal in automated S-parameter measurements," European Microwave Conference, pp. 69–73, 1975.



▼上の導出は以下の論文のやり方をベースにした

- ① • G. F. Engen and C. A. Hoer, "'Thru-reflect-line': An improved technique for calibrating the dual six-port automatic network analyzer," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 27, no. 12, pp. 987–993, 1979.



TRL (thru-reflect-line)

▼まえおき

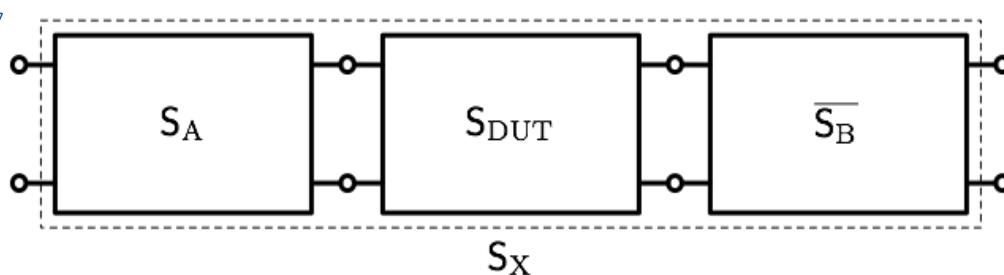
- TSD で使う SHORT を REFLECT に代えたもので, REFLECT の特性が正確にわかってなくてもいいのが特長
- ほかは TSD とだいたい同じ

▼使う基準試料

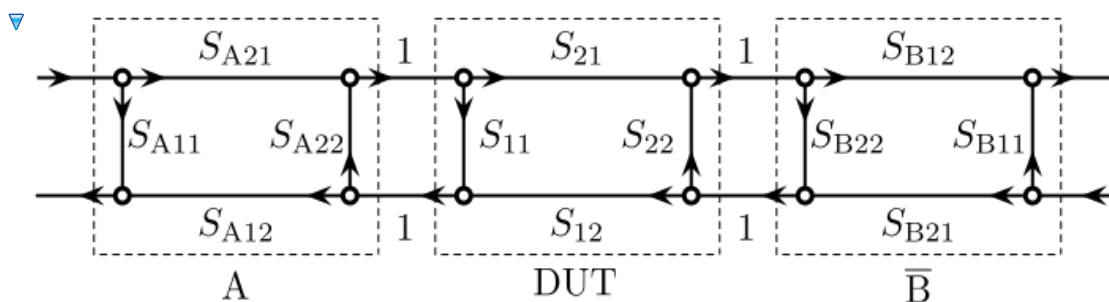
1. THRU
2. LINE
3. REFLECT

▼仮定

- ▼ 1. DUT と embedding network の接続関係を下図のように表せる



- Overline は左右反転操作を表す
- Bを裏返してあるのは, こうするとAとBの扱いが対称になるから



- 8つのSパラメータがあるが, 任意性があるため7つまでしか値を決定できない.
- TSDの導出では $S_{A21} = 1$ と仮定したが, 今度はそのような仮定はせずに考えてみる.

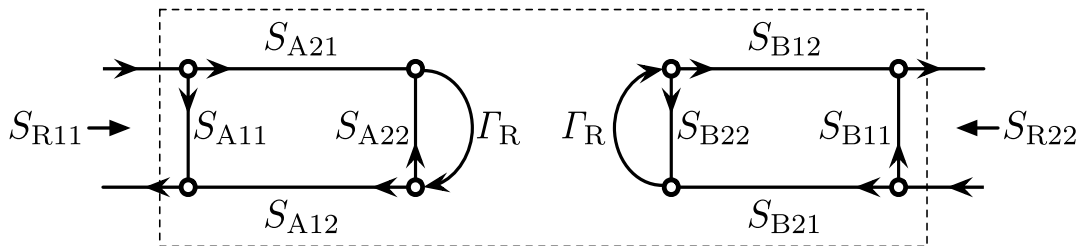
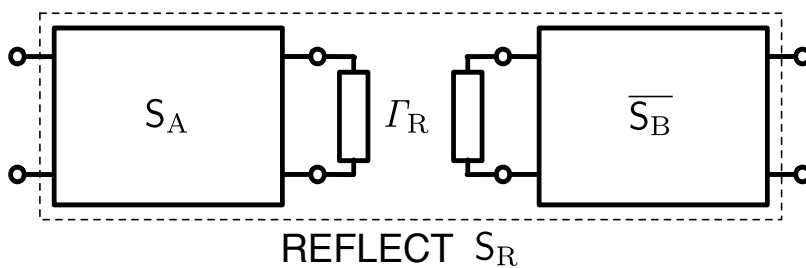
- $$S_{A(Z_{ref1})} \triangleq \begin{bmatrix} S_{A11} & S_{A12} \\ S_{A21} & S_{A22} \end{bmatrix}, S_{B(Z_{ref1})} \triangleq \begin{bmatrix} S_{B11} & S_{B12} \\ S_{B21} & S_{B22} \end{bmatrix}$$

$$\overline{S_{B(Z_{ref1})}} = S_{\overline{B}(Z_{ref1})} = \begin{bmatrix} S_{B22} & S_{B21} \\ S_{B12} & S_{B11} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ref1} \triangleq \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & Z_X \end{bmatrix}, \overline{Z_{ref1}} = \begin{bmatrix} Z_X & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

- 2. REFLECT の反射係数が左右で同じで、絶対値が1に近い
- 以上が成り立つなら S_A と $\overline{S_B}$ を決定でき、 S_X から S_{DUT} を de-embed できる

REFLECT



- Γ_R は特性がショートに近いかわかるオープンに近いかわかっていて、絶対値が1に近い方がいい。
ただし左右同一でなければならない。

- $$R_{A(Z_{ref1})} = \begin{bmatrix} R_{A11} & R_{A12} \\ R_{A21} & R_{A22} \end{bmatrix} = R_{A22} \begin{bmatrix} R_{A11}/R_{A22} & R_{A12}/R_{A22} \\ R_{A21}/R_{A22} & 1 \end{bmatrix} \triangleq R_{A22} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{S_{A21}} \begin{bmatrix} S_{A12}S_{A21} - S_{A11}S_{A22} & S_{A11} \\ -S_{A22} & 1 \end{bmatrix}$$

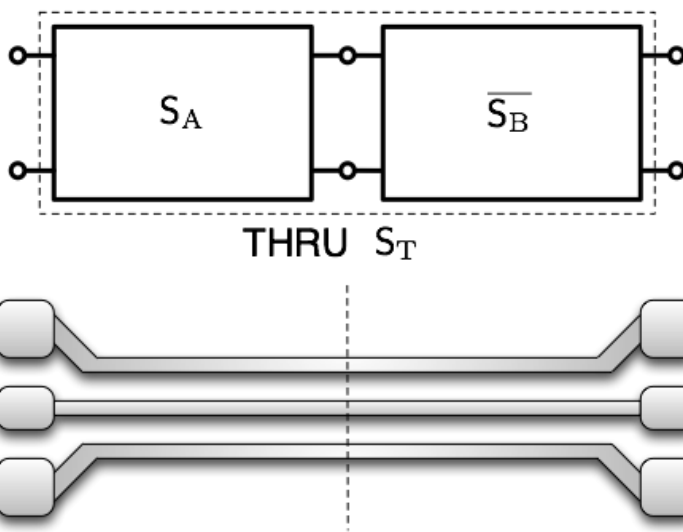
$$R_{B(Z_{ref1})} = \begin{bmatrix} R_{B11} & R_{B12} \\ R_{B21} & R_{B22} \end{bmatrix} = R_{B22} \begin{bmatrix} R_{B11}/R_{B22} & R_{B12}/R_{B22} \\ R_{B21}/R_{B22} & 1 \end{bmatrix} \triangleq R_{B22} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{S_{B21}} \begin{bmatrix} S_{B12}S_{B21} - S_{B11}S_{B22} & S_{B11} \\ -S_{B22} & 1 \end{bmatrix}$$

- $$S_{R(50\Omega)} = \begin{bmatrix} S_{R11} & \\ & S_{R22} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値}$$

$$\begin{aligned}
S_{R11} &= S_{A11} + \frac{S_{A12}\Gamma_R S_{A21}}{1 - S_{A22}\Gamma_R} = \frac{S_{A11} - \Gamma_R \det S_A}{1 - S_{A22}\Gamma_R} \\
&= \frac{R_{A11}\Gamma_R + R_{A12}}{R_{A21}\Gamma_R + R_{A22}} \\
&= \frac{a\Gamma_R + b}{c\Gamma_R + 1} \\
S_{R22} &= S_{B11} + \frac{S_{B12}\Gamma_R S_{B21}}{1 - S_{B22}\Gamma_R} = \frac{S_{B11} - \Gamma_R \det S_B}{1 - S_{B22}\Gamma_R} \\
&= \frac{R_{B11}\Gamma_R + R_{B12}}{R_{B21}\Gamma_R + R_{B22}} \\
&= \frac{a'\Gamma_R + b'}{c'\Gamma_R + 1}
\end{aligned}$$

▼ THRU



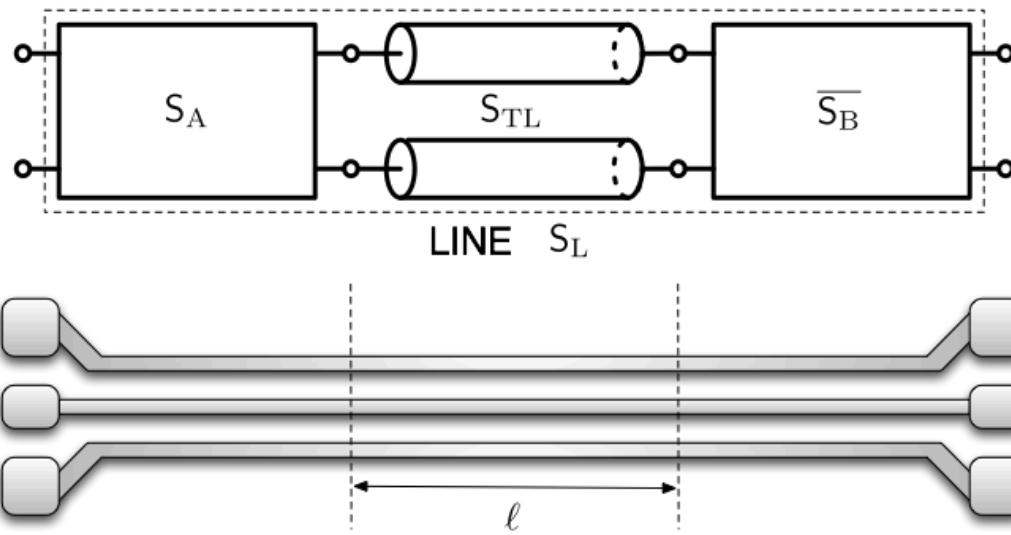
$$\begin{aligned}
R_{T(50\Omega)} &= \begin{bmatrix} R_{T11} & R_{T12} \\ R_{T21} & R_{T22} \end{bmatrix} \leftarrow \text{測定値} \\
&= \frac{1}{S_{T21}} \begin{bmatrix} S_{T12}S_{T21} - S_{T11}S_{T22} & S_{T11} \\ -S_{T22} & 1 \end{bmatrix} \\
&= R_{A(Z_{ref1})} \overline{R_{B(Z_{ref1})}} = R_{A(Z_{ref1})} T_B^{-1} \overline{R_{B(Z_{ref1})}}
\end{aligned}$$

•

$$\overline{R_B} = T_B^{-1} = \frac{1}{R_{B22}} \begin{bmatrix} 1 & c' \\ b' & a' \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{R_{B22}(a' - b'c')} \begin{bmatrix} a' & -c' \\ -b' & 1 \end{bmatrix}$$

▼ LINE

- TSDと同じ



▼ 解

▶ 未知数は $\gamma\ell$, Γ_R , R_{A11} , R_{A21} , R_{A12} , R_{B11} , R_{B21} , R_{B12} , (R_{A22}/R_{B22}) の 9 個.

• $R_H \triangleq R_L R_T^{-1} = \begin{bmatrix} R_{H11} & R_{H12} \\ R_{H21} & R_{H22} \end{bmatrix}$ ← 測定値からすぐ出せる

•
$$\gamma\ell = \text{acosh} \left(\frac{R_{H11} + R_{H22}}{2} \right)$$

▶
$$b, \left(\frac{a}{c} \right) = \frac{-(R_{H22} - R_{H11}) \pm \sqrt{(R_{H22} - R_{H11})^2 + 4R_{H21}R_{H12}}}{2R_{H21}}$$

ただし $|b| < \left| \frac{a}{c} \right|$ となるように解を選ぶ.

•
$$\left(\frac{c'}{a'} \right) = -\frac{R_{T12} - bR_{T22}}{R_{T11} - bR_{T21}}$$

•
$$b' = -\frac{R_{T11} - (a/c)R_{T21}}{R_{T12} - (a/c)R_{T22}}$$

▼
$$a = \pm \sqrt{\frac{S_{R11} - b}{S_{R22} - b'} \cdot \frac{1 - S_{R22}(c'/a')}{1 - S_{R11}(c/a)} \cdot \frac{R_{T11} - bR_{T21}}{-(c/a)R_{T12} + R_{T22}}}$$

▶ a の符号は Γ_R の推定値を使って

$$a = \frac{S_{R11} - b}{\Gamma_R [1 - S_{R11}(c/a)]}$$

を参考にして選ぶ.

$$c = a \cdot \left(\frac{c}{a} \right)$$

$$a' = \frac{R_{T11} - bR_{T21}}{-cR_{T12} + aR_{T22}}$$

$$c' = a' \cdot \left(\frac{c'}{a'} \right)$$

$$\frac{R_{A22}}{R_{B22}} = R_{T21} \cdot \frac{a' - b'c'}{ca' - b'}$$

$$\Gamma_R = \frac{S_{R11} - b}{-cS_{R11} - a}$$

▼導出

γ^ℓ の導出は TSD と同じ

$$R_H \triangleq R_L R_T^{-1} = R_A R_{TL} \overline{R_B} \overline{R_B}^{-1} R_A^{-1} = R_A R_{TL} R_A^{-1}$$

$$R_{HA} \triangleq R_H R_A = R_A R_{TL}$$

$$\begin{bmatrix} R_{H11} & R_{H12} \\ R_{H21} & R_{H22} \end{bmatrix} R_{A22} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} = R_{A22} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma^\ell} & 0 \\ 0 & e^{\gamma^\ell} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{H11}a + R_{H12}c & R_{H11}b + R_{H12} \\ R_{H21}a + R_{H22}c & R_{H21}b + R_{H22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{-\gamma^\ell} & be^{\gamma^\ell} \\ ce^{-\gamma^\ell} & e^{\gamma^\ell} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} R_{HA11} & R_{HA12} \\ R_{HA21} & R_{HA22} \end{bmatrix}$$

$$\frac{R_{HA11}}{R_{HA21}} = \frac{R_{H11}a + R_{H12}c}{R_{H21}a + R_{H22}c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{R_{HA11}}{R_{HA21}} = \frac{R_{H11}(a/c) + R_{H12}}{R_{H21}(a/c) + R_{H22}} = \frac{a}{c}$$

$$R_{H11} \left(\frac{a}{c} \right) + R_{H12} = \left(\frac{a}{c} \right) \left[R_{H21} \left(\frac{a}{c} \right) + R_{H22} \right]$$

$$R_{H21} \left(\frac{a}{c} \right)^2 + (R_{H22} - R_{H11}) \left(\frac{a}{c} \right) - R_{H12} = 0$$

$$\frac{R_{HA12}}{R_{HA22}} = \frac{R_{H11}b + R_{H12}}{R_{H21}b + R_{H22}} = b$$

$$R_{H11}b + R_{H12} = b(R_{H21}b + R_{H22})$$

$$R_{H21}b^2 + (R_{H22} - R_{H11})b - R_{H12} = 0$$

- したがって、 $\left(\frac{a}{c}\right)$ と b は同じ二次方程式の2つの解.

$$\therefore b, \left(\frac{a}{c}\right) = \frac{-(R_{H22} - R_{H11}) \pm \sqrt{(R_{H22} - R_{H11})^2 + 4R_{H21}R_{H12}}}{2R_{H21}}$$

ただし $|b| < \left|\frac{a}{c}\right|$ となるように解を選ぶ.

REFLECTより

- $$S_{R11}(c\Gamma_R + 1) = a\Gamma_R + b$$

$$\Gamma_R(a - S_{R11}c) = S_{R11} - b$$

$$a\Gamma_R \left(1 - S_{R11}\frac{c}{a}\right) = S_{R11} - b$$

$$\therefore a = \frac{S_{R11} - b}{\Gamma_R [1 - S_{R11}(c/a)]} \quad (\#)$$

$$\Gamma_R = \frac{S_{R11} - b}{a [1 - S_{R11}(c/a)]}$$

- ただし、この時点ではまだ a (と Γ_R) は不明.

同様に

- $$a' = \frac{S_{R22} - b'}{\Gamma_R [1 - S_{R22}(c'/a)]}$$

あるいは

$$\Gamma_R = \frac{S_{R22} - b'}{a' [1 - S_{R22}(c'/a)]}$$

- Γ_R を消す.

$$\frac{S_{R11} - b}{a [1 - S_{R11}(c/a)]} = \frac{S_{R22} - b'}{a' [1 - S_{R22}(c'/a)]}$$

- $$\frac{a}{a'} = \frac{S_{R11} - b}{S_{R22} - b'} \cdot \frac{1 - S_{R22}(c'/a)}{1 - S_{R11}(c/a)} \quad (*)$$

- b と (c/a) はすでにわかっているから、 a を求めるには $a', b', (c'/a')$ の値が必要.

THRUより

- $R_T = R_A \overline{R_B}$

- $$\overline{R_B} = \frac{1}{R_{B22}(a' - b'c')} \begin{bmatrix} a' & -c' \\ -b' & 1 \end{bmatrix} = R_A^{-1} R_T = \frac{1}{R_{A22}(a - bc)} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{T11} & R_{T12} \\ R_{T21} & R_{T22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a' & -c' \\ -b' & 1 \end{bmatrix} &= \frac{R_{B22}}{R_{A22}} \cdot \frac{a' - b'c'}{a - bc} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{T11} & R_{T12} \\ R_{T21} & R_{T22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{R_{B22}}{R_{A22}} \cdot \frac{a' - b'c'}{a - bc} \begin{bmatrix} R_{T11} - bR_{T21} & R_{T12} - bR_{T22} \\ -cR_{T11} + aR_{T21} & -cR_{T12} + aR_{T22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{c'}{a'}\right) = -\frac{R_{T12} - bR_{T22}}{R_{T11} - bR_{T21}}$$

$$b' = -\frac{(-b')}{1} = -\frac{-cR_{T11} + aR_{T21}}{-cR_{T12} + aR_{T22}} = -\frac{(c/a)R_{T11} - R_{T21}}{(c/a)R_{T12} - R_{T22}}$$

$$= -\frac{R_{T11} - (a/c)R_{T21}}{R_{T12} - (a/c)R_{T22}}$$

$$\frac{a'}{1} = \frac{R_{T11} - bR_{T21}}{-cR_{T12} + aR_{T22}}$$

$$\therefore aa' = \frac{R_{T11} - bR_{T21}}{-(c/a)R_{T12} + R_{T22}} \quad (**)$$

▼ (*) に (**) を代入して a' を消すと

$$a = \pm \sqrt{\frac{S_{R11} - b}{S_{R22} - b'} \cdot \frac{1 - S_{R22}(c'/a')}{1 - S_{R11}(c/a)} \cdot \frac{R_{T11} - bR_{T21}}{-(c/a)R_{T12} + R_{T22}}}$$

▶ Γ_R の推定値を使って (#) から a の符号を推定できる

$$a' = \frac{R_{T11} - bR_{T21}}{-(c/a)R_{T12} + R_{T22}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{R_{T11} - bR_{T21}}{-cR_{T12} + aR_{T22}}$$

▼あとは (R_{A22}/R_{B22}) を決めればいい

▼THRUより

$$R_T = R_A \overline{R_B} = \frac{R_{A22}}{R_{B22}(a' - b'c')} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & -c' \\ -b' & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{R_{A22}}{R_{B22}(a' - b'c')} \begin{bmatrix} aa' - bb' & -ac' + b \\ ca' - b' & -cc' + 1 \end{bmatrix} \quad \text{だから, たとえば}$$

$$R_{T21} = \frac{R_{A22}}{R_{B22}} \cdot \frac{ca' - b'}{a' - b'c'}$$

$$\therefore \frac{R_{A22}}{R_{B22}} = \frac{a' - b'c'}{ca' - b'} \cdot R_{T21}$$

▼文献

- ◎ G. F. Engen and C. A. Hoer, " 'Thru-reflect-line': An improved technique for calibrating the dual six-port automatic network analyzer," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 27, no. 12, pp. 987–993, 1979.



- ④ • H. J. Eul and B. Schiek, "A generalized theory and new calibration procedures for network analyzer self-calibration," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 39, no. 4, pp. 724–731, 1991.
- ④ • R. B. Marks, "Formulations of the basic vector network analyzer error model including switch-terms," 50th ARFTG Conf., pp. 115–126, December 1997.



付録

• 複素数	172
• 一次分数変換	174
• 初等複素関数	175
• MATLABによる多価複素関数のunwrapping	183
• 行列	185
• S行列の歴史的なことについて	191
• 参考文献	193

複素数

▼実部と虚部

- $z = \Re(z) + j\Im(z)$

- 実部: $\Re(z) = \frac{z + z^*}{2}$

- 虚部: $\Im(z) = \frac{z - z^*}{2j}$ 虚部は実数 ($j\Im(z)$ は虚数)

▼逆数の実部と虚部

- $Z \triangleq R + jX$

$$Y \triangleq \frac{1}{Z} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB$$

$$G = \Re(Y) = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = \Im(Y) = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$R = \Re(Z) = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \Im(Z) = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

▼絶対値と偏角

- ▼ $z = |z| e^{j\theta}$

- $|z| = \sqrt{zz^*}$

$$\theta = \arg z$$

- $z = x + jy$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-j\theta}$

- $\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$

▽積

$$\bullet z_1 \triangleq x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$$

$$z_2 \triangleq x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$$

$$\bullet z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_2 y_1 + x_1 y_2) \\ = |z_1| \cdot |z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

▽商

$$\bullet z_1 \triangleq x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$$

$$z_2 \triangleq x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$$

$$\bullet \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

一次分数変換

▼ (ほぼ) 同義語

- Linear fractional transformation (一次分数変換)
- Bilinear transformation (双一次変換)
- Linear transformation (一次変換)
- Bilinear fractional transformation
- Möbius transformation
- Homographic transformation
- Projective transformation

◎ ▼ 一次分数変換とは

▼ 複素数 z を w に写す以下の形の写像が「一次分数変換」

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

a, b, c, d は複素数の定数で $ad - bc \neq 0$.

- $ad - bc = 0$ だと

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + bc/a} = \frac{a}{c} \cdot \frac{az + b}{az + b} = \frac{a}{c}$$

▼ 逆変換

- $$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

- これも一次分数変換になっている

▼ 積

- $w = \frac{az + b}{cz + d}$ と $w' = \frac{a'w + b'}{c'w + d'}$ とを合成すると

$$w' = \frac{a'(az + b)/(cz + d) + b'}{c'(az + b)/(cz + d) + d'} = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)w + (c'b + d'd)} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

- $$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

初等複素関数

- $z = x + jy$

▽ 指数関数

- $$\begin{aligned}\exp z &= \exp x \exp jy \\ &= \exp x \cos y + j \exp x \sin y \\ &= (\cosh x + \sinh x) \cos y + j(\cosh x + \sinh x) \sin y \\ &= (\cosh x \cos y + j \sinh x \sin y) + (\sinh x \cos y + j \cosh x \sin y) \\ &= \cosh z + \sinh z\end{aligned}$$

- $\exp z$ は周期 $2\pi j$ の周期関数

- $$\begin{aligned}\exp jz &= \exp jx \exp(-y) \\ &= (\cosh y - \sinh y) \exp jx \\ &= (\cosh y - \sinh y) \cos x + j(\cosh y - \sinh y) \sin x \\ &= (\cos x + j \sin x) \cosh y - (\cos x + j \sin x) \sinh y \\ &= (\cos x \cosh y - j \sin x \sinh y) + j(\sin x \cosh y + j \cos x \sinh y) \\ &= \cos z + j \sin z\end{aligned}$$

- $\exp jz$ は周期 2π の周期関数

▽ 双曲線関数, 三角関数

- 双曲線関数と三角関数も周期関数

- $$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ &= \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y\end{aligned}$$

- $$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\tanh x + j \tan y}{1 + j \tanh x \tan y}$$

- $$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

- $\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$
- $\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$
 $= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$
- $\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$
 $= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$
- $\tan z = \frac{\tan x + j \tanh y}{1 - j \tan x \tanh y}$
- $\cot z = \frac{1}{\tan z}$
- $\sec z = \frac{1}{\cos z}$
- $\csc z = \frac{1}{\sin z}$
- $\cosh(jz) = \cos z$
 $\cos(jz) = \cosh z$
 $\sinh(jz) = j \sin z$
 $\sin(jz) = j \sinh z$
 $\tanh(jz) = j \tan z$
 $\tan(jz) = j \tanh z$
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
 $1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$
 $1 - \tanh^2 z = \frac{1}{\cosh^2 z}$
- $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$
 $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$
 $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
 $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

- $\cosh z_1 \cosh z_2 = \frac{1}{2} [\cosh(z_1 + z_2) + \cosh(z_1 - z_2)]$
- $\sinh z_1 \sinh z_2 = \frac{1}{2} [\cosh(z_1 + z_2) - \cosh(z_1 - z_2)]$
- $\sinh z_1 \cosh z_2 = \frac{1}{2} [\sinh(z_1 + z_2) + \sinh(z_1 - z_2)]$
- $\cosh z_1 \sinh z_2 = \frac{1}{2} [\sinh(z_1 + z_2) - \sinh(z_1 - z_2)]$
- $\cos z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2} [\cos(z_1 + z_2) + \cos(z_1 - z_2)]$
- $\sin z_1 \sin z_2 = -\frac{1}{2} [\cos(z_1 + z_2) - \cos(z_1 - z_2)]$
- $\sin z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2} [\sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2)]$
- $\cos z_1 \sin z_2 = \frac{1}{2} [\sin(z_1 + z_2) - \sin(z_1 - z_2)]$

▽半角

- $\sin \frac{z}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos z)}$
- $\sinh \frac{z}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh z - 1)}$
- $\cos \frac{z}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos z)}$
- $\cosh \frac{z}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh z + 1)}$
- $\tan \frac{z}{2} = \frac{1 - \cos z}{\sin z} = \frac{\sin z}{1 + \cos z}$
- $\tanh \frac{z}{2} = \frac{\cosh z - 1}{\sinh z} = \frac{\sinh z}{\cosh z + 1}$

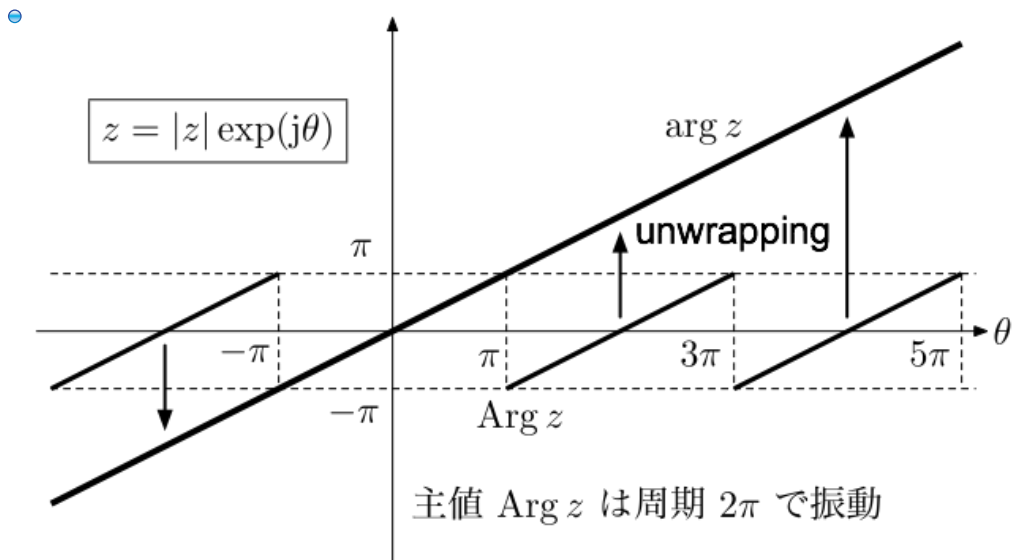
▽対数関数

- $\ln z$ は周期関数 $\exp z$ の逆関数だから無限多価
- 主値 : $\text{Ln } z = \text{Ln } |z| + j \text{Arg } z \quad (-\pi < \text{Arg } z \leq \pi)$

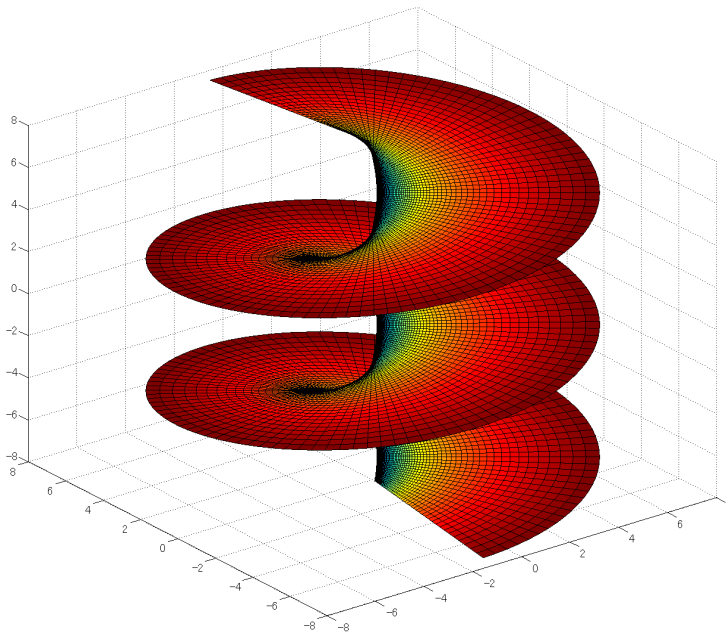
▽ $\ln z = \text{Ln } |z| + j \arg z$ (無限多価)

- 多価性は z の偏角に由来する

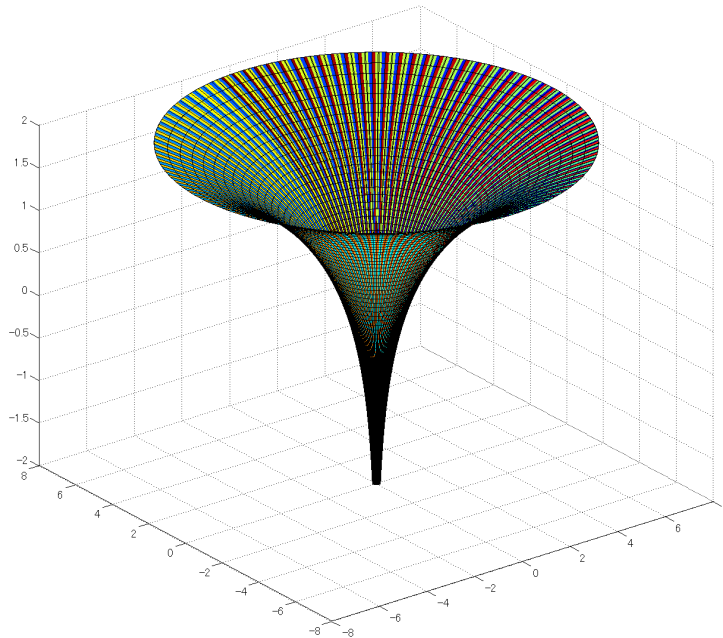
▼虚部を求める際に unwrapping (z のもとの偏角を正しく反映させる操作) が必要



- MATLAB による $\ln z$ の虚部の unwrapping
- 多価関数は「Riemann 面」を考えると多価じゃなくなってわかりやすい (こともある)
- ▼ $\ln z$ のリーマン面



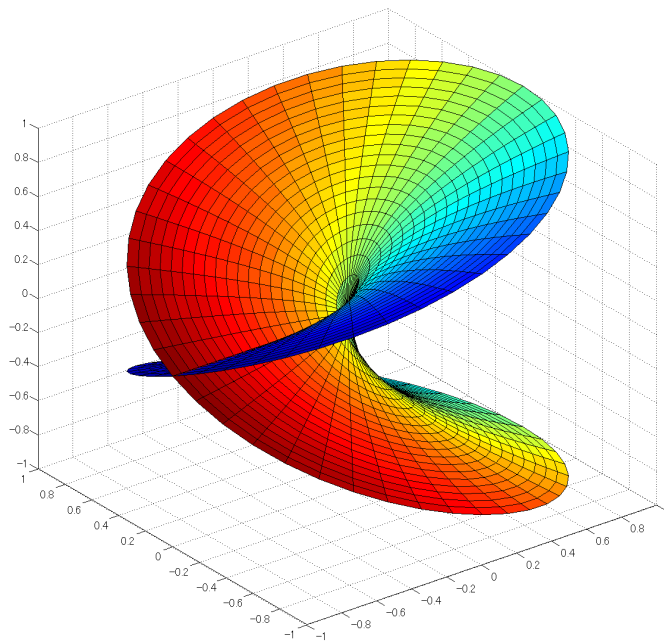
- 下の平面は z 平面. 縦軸は $\ln(z)$ の虚部. 虚部が多価になることがわかる. 色は実部で塗り分け



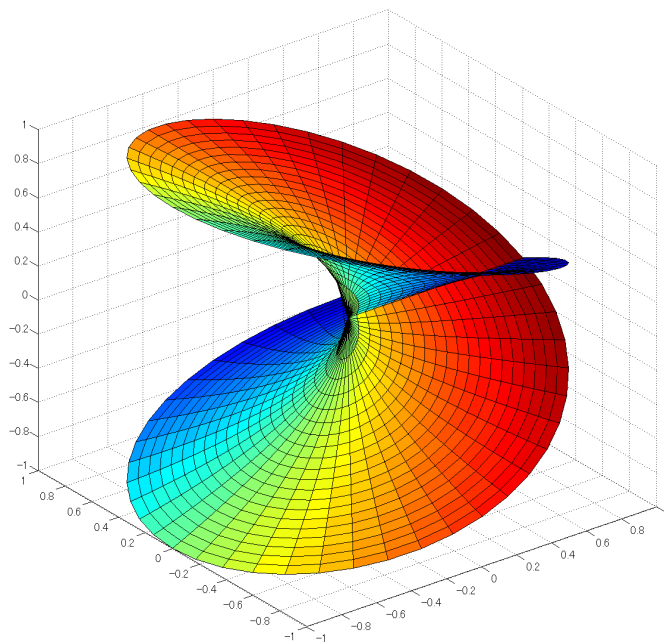
- 下の平面は z 平面. 縦軸は $\ln(z)$ の実部. 実部は一価. 色は虚部で塗り分け

▽べき乗根

- $z^{1/n}$ は n 価関数
- ◎ ▽ $z^{1/2} = \pm\sqrt{z}$
 - $= \sqrt{|z|} \exp\left(j\frac{\arg z}{2}\right), \sqrt{|z|} \exp\left(j\frac{\arg z + 2\pi}{2}\right)$
 - 物理的に正しい解を選んだ上で偏角を unwrap する
- ◎ • MATLAB による $z^{1/2}$ の unwrapping
- ◎ ▽ $w = z^{1/2}$ のリーマン面



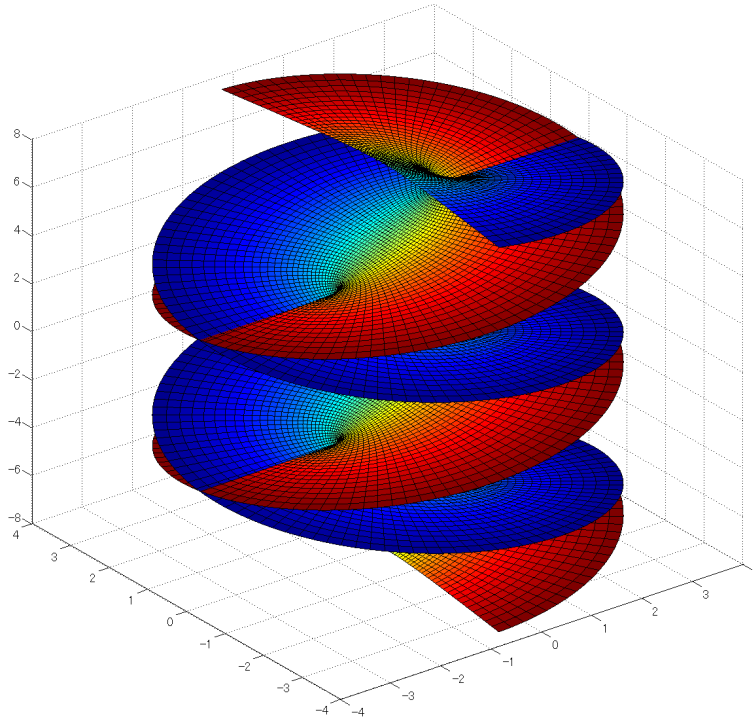
- 下の平面が z . 縦軸は $\text{Re}(w)$. 色は $\text{Im}(w)$ で塗り分け



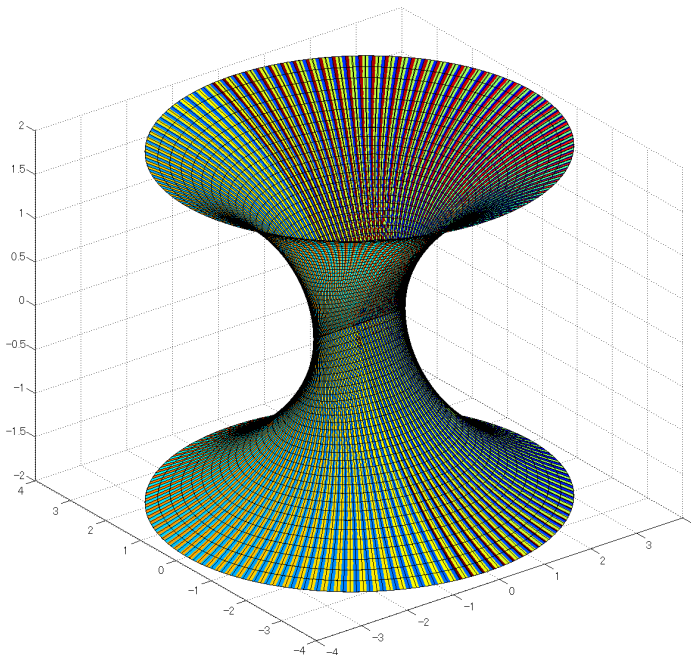
- 下の平面が z . 縦軸は $\text{Im}(w)$. 色は $\text{Re}(w)$ で塗り分け

▽ 逆双曲線関数・逆三角関数

▽
$$\text{arccosh } z = \ln \left[z + (z + 1)^{1/2} (z - 1)^{1/2} \right]$$



- 下の平面は z 平面. 縦軸は $\operatorname{arccosh}(z)$ の虚部. 色は実部で塗り分け



- 下の平面は z 平面. 縦軸は $\operatorname{arccosh}(z)$ の実部. 色は虚部で塗り分け

- $\operatorname{arsinh} z = \ln \left[z + (z^2 + 1)^{1/2} \right]$

- ▶ $\operatorname{arccos} z = \frac{1}{j} \operatorname{arccosh} z = \frac{1}{j} \ln \left[z + (z^2 - 1)^{1/2} \right]$

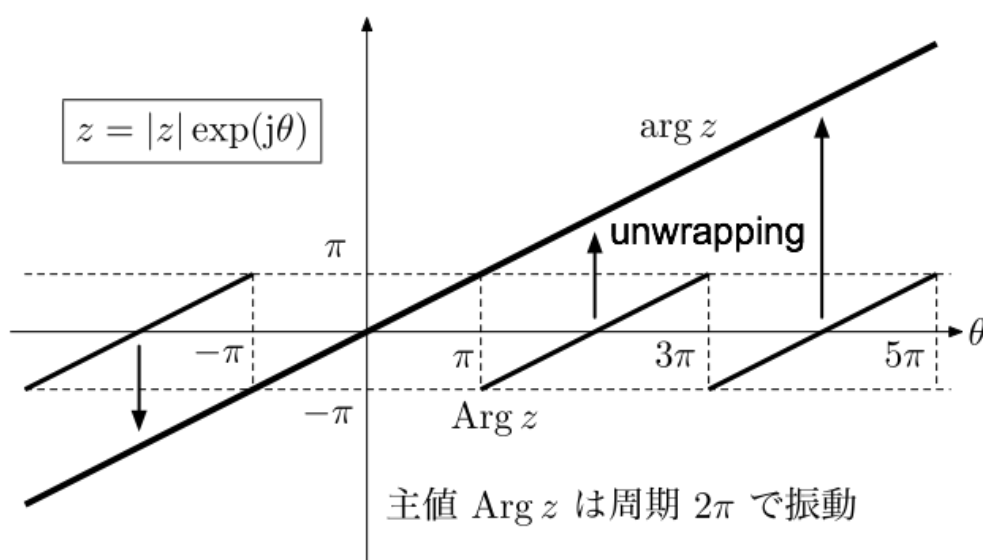
$$\nabla \quad \arcsin z = \frac{1}{j} \operatorname{arcsinh}(jz) = \frac{1}{j} \ln \left[jz + (1 - z^2)^{1/2} \right]$$

⊙ $\arcsin z$ のリーマン面

MATLABによる多価複素関数のunwrapping

▼多価複素関数の unwrapping の考え方

- MATLABの「angle」は偏角の主値 (Arg) を返す



- $\text{Arg}(z)$ を $\arg(z)$ に戻す操作をしてくれるのが MATLAB の「unwrap」

◎ ▼ $\ln z$ の虚部の unwrapping

- $w = \ln z = \text{Ln} |z| + j \arg z$
 $= u + jv$

▼ やり方 (1) : 上の式通り

- z を複素数のベクトルとする
- $u = \log(\text{abs}(z));$
- $v = \text{unwrap}(\text{angle}(z));$

▼ やり方 (2) : 先に $\log(z)$ を計算する

- $w = \log(z);$
- $u = \text{real}(w);$
- $v = \text{unwrap}(\text{imag}(w));$

◎ ▼ $z^{1/2}$ の unwrapping

▶ $w = z^{1/2} = \pm\sqrt{z}$

$$= \sqrt{|z|} \exp\left(j\frac{\arg z}{2}\right), \sqrt{|z|} \exp\left(j\frac{\arg z + 2\pi}{2}\right)$$

▼ やり方 (1) : 上の式通り

- z を複素数のベクトルとする
- $w1 = \text{sqrt}(\text{abs}(z)) .* \exp(1i * \text{unwrap}(\text{angle}(z)) / 2);$
- $w2 = \text{sqrt}(\text{abs}(z)) .* \exp(1i * \text{unwrap}(\text{angle}(z) + 2*\text{pi}) / 2);$

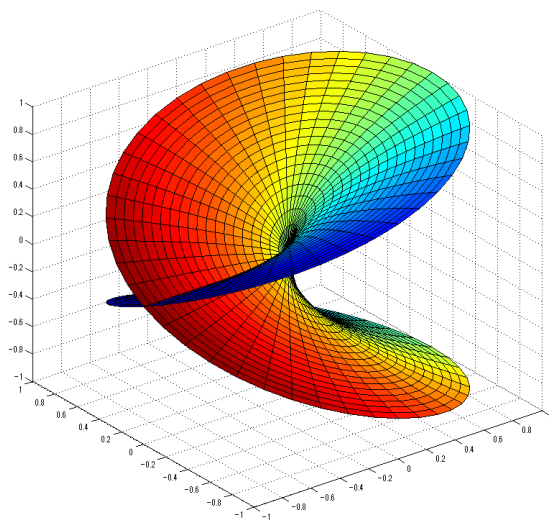
▼ やり方 (2) : 先に $\text{sqrt}(z)$ を計算する

- $ww = \text{sqrt}(z)$ としたうえで
- $w1 = \text{abs}(ww) .* \exp(1i * \text{unwrap}(\text{angle}(ww)) * 2) / 2);$
- ▶ $w2 = \text{abs}(ww) .* \exp(1i * \text{unwrap}(\text{angle}(-ww)) * 2) / 2);$

▼ $w = z^{1/2}$ のリーマン面

▼ 「`cplxroot(2)`」でリーマン面の絵が出てくる

•



- 下の平面が z . 縦軸は $\text{Re}(w)$

行列

▼ 単位行列と零行列の記号

$$\bullet \quad 1_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad 0_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

▼ 積

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

◎ ▼ 行と列の入れ替え

▼ 行の入れ替え

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

▼ 列の入れ替え

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

▼ 行と列の入れ替え

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

したがって $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ は直交行列

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -d \end{bmatrix}$

▼ 転置

- $(AB)^T = B^T A^T$

▼ 転置共役 (conjugate transpose, adjoint, Hermitian conjugate)

- $A^\dagger \triangleq (A^T)^* = (A^*)^T$

▼ トレース (対角和)

- A を $n \times n$ の行列とする
- $\text{tr } A = \sum_i A_{ii}$
- トレースは相似変換に対して不変

▼ 行列式

- A, B を $n \times n$ の行列とする
- $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$

▼ 正則行列

- 逆行列を持つ正方行列のこと

▼ 逆行列

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

▽対角行列

▽スカラー行列

- 単位行列の定数倍の行列は「スカラー行列」と呼ばれる

▽対角行列の逆行列

- $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{bmatrix}$$

▽対角行列同士は可換

- $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

▽左から対角行列をかけたら行にかかる

- $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & af \\ dg & dh \end{bmatrix}$$

▽右から対角行列をかけたら列にかかる

- $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{bmatrix}$$

▽対角行列とその逆行列ではさむと

- $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1}ea & a^{-1}fd \\ d^{-1}ga & d^{-1}hd \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e & a^{-1}fd \\ d^{-1}ga & h \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} aea^{-1} & afd^{-1} \\ dga^{-1} & dh d^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e & afd^{-1} \\ dga^{-1} & h \end{bmatrix}$$

▽対称行列 (symmetric matrix)

- A を $n \times n$ の行列とする
- $A^T = A$ ならば A は対称行列。
特に A が複素行列ならば A は複素対称行列。
- 対称行列 A と B の積 AB は、対称とは限らない。A と B が可換な場合に限
り AB も対称
- 実対称行列は直交行列で対角化される
- 複素対称行列は複素直交行列で対角化される

▽エルミート行列 (Hermitian, self-adjoint)

- A を $n \times n$ の複素行列とする
- $A^\dagger = A$ ならば A はエルミート行列

▽直交行列 (orthogonal matrix)

- A を $n \times n$ の 実 行列とする
- $A^T A = A A^T = 1_n$ ならば A は直交行列. $A^T = A^{-1}$.

▽ユニタリー行列 (unitary matrix)

- A を $n \times n$ の (複素) 行列とする
- $A^\dagger A = A A^\dagger = 1_n$ ならば A はユニタリー行列. $A^\dagger = A^{-1}$.

▽複素直交行列 (complex-orthogonal matrix)

- A を $n \times n$ の (複素) 行列とする
- $A^T A = A A^T = 1_n$ ならば A は複素直交行列. $A^T = A^{-1}$.

▽特性方程式

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき
$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

▽Cayley-Hamilton の定理

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき
$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)1_2 = 0_2$$

◎ ▽極分解 (polar decomposition) (1)

- ▽ユニタリー行列とエルミート行列による極分解

- 単に「極分解」といったらこれのこと

- A を $n \times n$ の複素行列とする

- ▽ $A = UP$ と書ける. ただし

U は unitary ($UU^\dagger = 1_n$).

P は positive semidefinite Hermitian ($P^\dagger = P$).

- U が回転・鏡映, P が伸び縮みを表す

- $A = P'U$ とも書ける.

$$P' = UPU^{-1}$$

▽ 極分解 (polar decomposition) (2)

- 複素直交行列と複素対称行列による極分解

- A を $n \times n$ の複素行列とする

- $A = QG$ と書ける. ただし

Q は complex orthogonal ($QQ^T = 1_n$).

G は complex symmetric ($G^T = G$).

- $A = G'Q$ とも書ける.

$$G' = QGQ^{-1}$$

▽ vec 演算子 (行列のベクトル化)

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とする

- ▽ Column stacking によるベクトル化

- $$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

- ▽ Row stacking によるベクトル化

- $$\text{vec}(A^T) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

▽ Kronecker 積 (テンソル積)

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ のとき

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

▽ vec と Kronecker 積を利用した式変形

- ▽ $\text{vec}(A \cdot B \cdot C) = (C^T \otimes A) \cdot \text{vec}(B)$

- 右辺は行列と縦ベクトルの積

- 要は、3つの行列の積 ABC の真ん中に挟まれてる B を外に取り出せる。

▽ 雑多な式変形

- A を $n \times n$ の行列とする


- $(1_n \pm A)A = A(1_n \pm A)$

- $(1_n \pm A)^{-1}(1_n \mp A) = (1_n \mp A)(1_n \pm A)^{-1}$

- $\|A\| < 1$ ならば

$$(1_n + A)^{-1} \simeq 1 - A + A^2 - A^3 + \dots$$

S行列の歴史的なことについて

- ▼ マイクロ波分野のS行列が登場する書物として古いものは
 - ◎ C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell, editors, Principles of Microwave Circuits, Dover, 1965 (Republication of McGraw-Hill 1948).
- ▼ 1956年に, IRE Transactions on Circuit Theory, vol. 3, no. 2 でS行列に関する特集が組まれている
 - ▼ その中の Carlin の論文で, S行列の歴史について言及がある
- ◎ H. J. Carlin, "The scattering matrix in network theory," IRE Trans. Circuit Theory, vol. 3, no. 2, pp. 88–97, 1956. 
- ▶ それによると, Sパラメータを用いた最も古い論文は1920年のものらしいとのこと

- ◎ いわゆる「mixed-mode Sパラメータ」は1995年に Bockelman と Eisenstadt の論文が出てから広く使われるようになったが, 以上の文献を見ると, 同等以上のことが古くから理解されていたらしいことが窺い知れる

- ▼ 「複素数の特性インピーダンス」を使って定義した反射係数にあらわに言及している古めの文献の例として, 下記がある
- ◎ R. B. Adler, L. J. Chu, and R. M. Fano, Electromagnetic Energy Transmission and Radiation, MIT Press, 1969 (Republication of Wiley, 1960).

- ▼ Kurokawa の一般化S行列の論文は1965年
- ◎ K. Kurokawa, "Power waves and the scattering matrix," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 13, no. 2, pp. 194–202, 1965.
 - ◎ 基準インピーダンスが複素数の場合のS行列の定義のしかたがそれまでのものと違う
 - ◎ 以後の文献では, 「複素数の基準インピーダンスで定義したS行列」として現れるのは一般化S行列が多くなる
- ▼ 黒川兼行先生へのインタビュー記事が下記に掲載されている

- 『RFワールド No. 10 はじめてのネットワーク・アナライザ』, CQ出版社, 2010.

▽ Pseudo S matrix を導入したのは

- R. B. Marks and D. F. Williams, "A general waveguide circuit theory," Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, vol. 97, no. 5, pp. 533–562, 1992.



参考文献

- ① R. B. Adler, L. J. Chu, and R. M. Fano, *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, MIT Press, 1969 (Republication of Wiley, 1960).
- ① I. J. Bahl, *Fundamentals of RF and Microwave Transistor Amplifiers*, Wiley, 2009.
- ① N. Balabanian and T. A. Bickart, *Electrical Network Theory*, Wiley, 1969.
- ① L. Besser and R. Gilmore, *Practical RF Circuit Design for Modern Wireless Systems Vol. 1: Passive Circuits and Systems*, Artech House, 2003.
- ① E. Bogatin, *Signal and Power Integrity – Simplified*, 2nd edition, Prentice Hall, 2009.
- ① H. J. Carlin and A. B. Giordano, *Network Theory: An Introduction to Reciprocal and Nonreciprocal Circuits*, Prentice-Hall, 1964.
- ① J. Choma, Jr., *Electrical Networks: Theory and Analysis*, Krieger Publishing Company, 1991 (Republication of Wiley, 1985).
- ① J. Choma and W. K. Chen, *Feedback Networks: Theory and Circuit Applications*, World Scientific, 2007.
- ① R. Collier and D. Skinner, *Microwave Measurements*, 3rd edition, IET, 2007.
- ① R. Collier, *Transmission Lines*, Cambridge University Press, 2013.

- ④ R. E. Collin, Foundations for Microwave Engineering, 2nd edition, Wiley-Interscience, 2001 (Republication of McGraw-Hill, 1992).
- ④ J. Dobrowolski, Microwave Network Design Using the Scattering Matrix, Artech House, 2010.
- ④ J. Dobrowolski and W. Ostrowski, Computer-Aided Analysis, Modeling, and Design of Microwave Networks: The Wave Approach, Artech House, 1996.
- ④ J. P. Dunsmore, Handbook of Microwave Component Measurements with Advanced VNA Techniques, Wiley, 2012.
- ④ L. N. Dworsky, Modern Transmission Line Theory and Applications, Wiley-Interscience, 1979.
- ④ W. R. Eisenstadt, B Stengel, and B. M. Thompson, Microwave Differential Circuit Design Using Mixed-Mode S-Parameters, Artech House, 2006.
- ④ G. F. Engen, Microwave Circuit Theory and Foundations of Microwave Metrology, Peter Peregrinus, 1992.
- ④ 藤城義和, 「Sパラメータによる電子部品の評価」, TDKアプリケーションノート, AN-SP06A001_ja, 2007, https://product.tdk.com/ja/technicalsupport/tvcl/pdf/an-sp06a001_ja.pdf
- ④ R. Gilmore and L. Besser, Practical RF Circuit Design for Modern Wireless Systems Vol. 2: Active Circuits and Systems, Artech House, 2003.
- ④ G. Gonzalez, Microwave Transistor Amplifiers: Analysis and Design, 2nd edition, Prentice Hall, 1996.

- ④ K. D. Granzow, Digital Transmission Lines: Computer Modelling and Analysis, Oxford University Press, 1998.
- ④ E. A. Guillemin, Communication Networks, vol. II, Wiley, 1935.
- ④ 羽鳥孝三, 『基礎電気回路 2』, コロナ社, 1985.
- ④ R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, 2nd edition, Cambridge University Press, 2012.
- ④ R. A. Horn and C. R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1991.
- ④ 市川古都美, 市川裕一, 『高周波回路設計のためのSパラメータ詳解』, CQ出版社, 2007.
- ④ 池田哲夫, 『電気・電子学生のための回路網理論』, 丸善, 1980.
- ④ 岩崎俊, 『電磁波計測』, コロナ社, 2007.
- ④ 川上正光, 『改版 基礎電気回路I 線形定常回路(1)』, コロナ社, 1967.
- ④ 川上正光, 『改版 基礎電気回路II 線形定常回路(2)』, コロナ社, 1967.
- ④ R. W. P. King, Transmission-Line Theory, Dover, 1965 (Republication of McGraw-Hill 1955).
- ④ K. Kurokawa, An Introduction to the Theory of Microwave Circuits, Academic Press, 1969.
- ④ T. H. Lee, Planar Microwave Engineering, Cambridge University Press, 2004.

- ④ P. C. Magnusson, G. C. Alexander, V. K. Tripathi, and A. Weisshaar, Transmission Lines and Wave Propagation, 4th edition, CRC Press, 2001.
- ④ G. Matthaei, L. Young, and E. M. T. Jones, Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures, Artech House, 1980 (Republication of McGraw-Hill, 1964).
- ④ R. Mavaddat, Network Scattering Parameters, World Scientific, 1996.
- ④ C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell, editors, Principles of Microwave Circuits, Dover, 1965 (Republication of McGraw-Hill, 1948).
- ④ 中島将光, 『マイクロ波工学』, 森北出版, 1975.
- ④ 岡田文明, 『マイクロ波工学』, 学献社, 1993.
- ④ F. Olyslager, Electromagnetic waveguides and Transmission Lines, Oxford University Press, 1999.
- ④ 大野克郎, 『現代 過渡現象論』, オーム社, 1994.
- ④ 大野克郎, 西哲生, 『大学課程 電気回路 (1) 第3版』, オーム社, 1999.
- ④ 尾崎弘, 黒田一之, 『回路網理論 I』, 共立出版, 1959.
- ④ C. R. Paul, Analysis of Multiconductor Transmission Lines, 2nd edition, Wiley-Interscience, 2008.
- ④ D. M. Pozar, Microwave Engineering, 4th edition, Wiley, 2011.
- ④ 『RFワールド No. 10 はじめてのネットワーク・アナライザ』, CQ出版社, 2010.
- ④ P. A. Rizzi, Microwave Engineering: Passive Circuits, Prentice Hall, 1988.

- ④ 齋藤正男, 『回路網理論入門』, 東京大学出版会, 1967.
- ④ 佐藤利三郎, 『伝送回路』, コロナ社, 1963.
- ④ 瀧保夫, 『伝送回路 第2版』, 共立出版, 1978.
- ④ 束原恒夫, 『CMOS RF回路設計』, 丸善, 2009.
- ④ G. D. Vendelin, A. M. Pavio, and U. L. Rohde, Microwave Circuit Design Using Linear and Nonlinear Techniques, 2nd edition, Wiley, 2005.
- ④ S. A. Wartenberg, RF Measurements of Die and Packages, Artech House, 2002.
- ④ R. J. Weber, Introduction to Microwave Circuits: Radio Frequency and Design Applications, IEEE Press, 2001.
- ④ R. A. Witte, Spectrum and Network Measurements, 2nd edition, Scitech Publishing, 2014.

▼先行公開

- 基底の変換と座標変換199
- 電圧・電流の変換とY行列・Z行列の変換200
- 2ポートの even/odd (偶奇) 変換202
- 対称2ポートの even/odd 変換と二等分定理204
- 差動アンプの unilateralization207

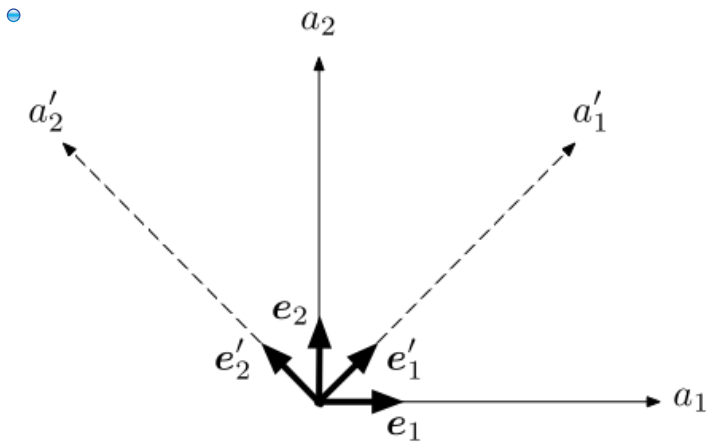
基底の変換と座標変換

▼基底の変換

▼ $n \times n$ の行列 R_a による基底の変換の式は

$$\begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} R_a$$

▶ 「横ベクトル (変換後)」 = 「横ベクトル (変換前)」 × 「変換行列」



▼座標変換

• 上記のように基底を変換したとき、座標は違う形の式で変換される

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

• 「縦ベクトル (変換前)」 = 「変換行列」 × 「縦ベクトル (変換後)」

電圧・電流の変換とY行列・Z行列の変換

▽ポート電圧ベクトルとポート電流ベクトル

$$v = [V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_n]^T$$

$$i = [I_1 \quad I_2 \quad \cdots \quad I_n]^T$$

▽電圧・電流に対する座標変換

⊙ ▽電圧に対する座標変換

$$v = Av'$$

ただし A には逆行列が存在するものとする。

⊙ A という文字は, 2n-port に対するABCD行列からとった

▽電流に対する座標変換

$$i = Di'$$

ただし D には逆行列が存在するものとする。

⊙ 同様に, D という文字は, 2n-port に対するABCD行列からとった

▽Z行列の変換

$$v = Zi$$

$$Av' = ZDi'$$

$$v' = A^{-1}ZDi' = Z'i'$$

$$\therefore Z' = A^{-1}ZD$$
$$Z = AZ'D^{-1}$$

▽Y行列の変換

$$i = Yv$$

$$Di' = YAv'$$

$$i' = D^{-1}YAv' = Y'v'$$

$$\begin{aligned} \therefore Y' &= D^{-1}YA \\ Y &= DZ'A^{-1} \end{aligned}$$

▼変換行列AとDに対する制約

- AとDはそれぞれ勝手に選ぶのではなく、互いに関係づけて（一方を決めたら他方が決まるように）選ぶ

▼変換によってパワーが保存されとした場合

- ▼ $v \cdot i^* = v' \cdot i'^*$ となるようにする

- (注) ここでは縦ベクトル同士の内積 (dot product) を単純に

$$x \cdot y \triangleq x^T y = \sum_i x_i y_i \text{ とする } (x \cdot y = x^\dagger y \text{ ではない})$$

- $$\begin{aligned} v \cdot i^* &= (Av') \cdot (D^* i'^*) \\ &= (Av')^T D^* i'^* \\ &= v'^T A^T D^* i'^* \\ &= v' \cdot (A^T D^* i'^*) \end{aligned}$$

$$\therefore A^T D^* = 1_n \text{ ならいい.}$$

- $A^\dagger D = 1_n$

- $A = A_U A_P$ ($A_U A_U^\dagger = 1_n$, $A_P^\dagger = A_P$) とユニタリ-行列とエルミート行列で極分解すると,

$$D = (A^\dagger)^{-1} = (A_P^\dagger A_U^\dagger)^{-1} = (A_P A_U^\dagger)^{-1} = (A_U^\dagger)^{-1} A_P^{-1} = A_U A_P^{-1}$$

- $$\begin{aligned} v &= Av' = A_U A_P v' \\ i &= Di' = A_U A_P^{-1} i' \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} Z' &= A^{-1} Z D = A_P^{-1} A_U^{-1} Z A_U A_P^{-1} \\ Z &= A Z' D^{-1} = A_U A_P Z' A_P A_U^{-1} \end{aligned}$$

▶変換によって行列の対称性 (reciprocity) が保たれるとした場合

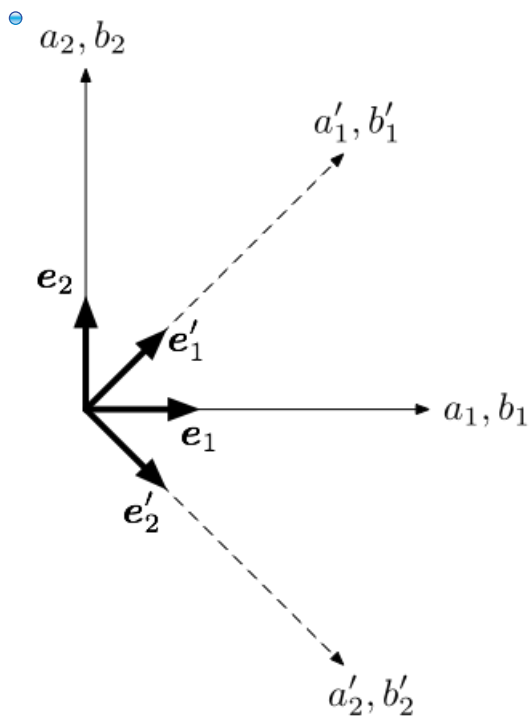
2ポートの even/odd (偶奇) 変換

▼ 2-port の even/odd 変換

- 新しい基底を以下のように定義する

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$$

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$$



▼ 変換行列

$$R_{e/o} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- ▼ $R_{e/o}^T = R_{e/o}^{-1}$ なので $R_{e/o}$ は直交行列

- 直交行列による相似変換はベクトルの長さを変えない

▼ 基底の変換

- $$\begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} R_{e/o} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e_1 + e_2 & e_1 - e_2 \end{bmatrix}$$

- 基底ベクトルの長さは変わらず、向きが変わるだけ

▽波変数 (aとb) の座標変換

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= R_{e/o} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a'_1 + a'_2 \\ a'_1 - a'_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= R_{e/o} \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} b'_1 + b'_2 \\ b'_1 - b'_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

▽S行列の変換

$$\bullet \mathbf{b}' = R_{e/o}^{-1} \mathbf{b} = R_{e/o}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{a} = R_{e/o}^{-1} \mathbf{S} R_{e/o} \mathbf{a}' = \mathbf{S}_{e/o} \mathbf{a}'$$

$$\begin{aligned} \bullet \therefore \mathbf{S}_{e/o} &= R_{e/o}^{-1} \mathbf{S} R_{e/o} = R_{e/o}^T \mathbf{S} R_{e/o} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{11} + S_{21} + S_{12} + S_{22} & S_{11} + S_{21} - S_{12} - S_{22} \\ S_{11} - S_{21} + S_{12} - S_{22} & S_{11} - S_{21} - S_{12} + S_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

▽電圧と電流の変換

▽下記が一般式

$$\bullet \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}' \quad \text{電圧に対する座標変換}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{D} \mathbf{i}' \quad \text{電流に対する座標変換}$$

▽Even/odd 変換の場合、電圧と電流に対しても波変数と同じ変換をほどこせばいい

$$\bullet \mathbf{A}_{e/o} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{e/o} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

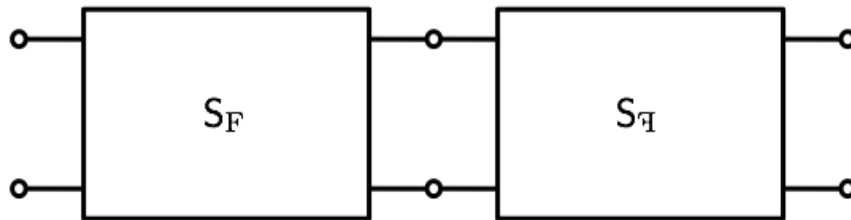
$$\bullet \mathbf{v} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{e/o} \mathbf{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V'_1 + V'_2 \\ V'_1 - V'_2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{i} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{e/o} \mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I'_1 + I'_2 \\ I'_1 - I'_2 \end{bmatrix}$$

対称2ポートの even/odd 変換と二等分定理

▽ 左右対称（軸対称）な2ポート

- 対称2ポートは、下図のように鏡面对称な2つの2ポートの縦続接続で表せる



- $S_F = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ とすると $S_{\Gamma} = \begin{bmatrix} S_{22} & S_{21} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}$

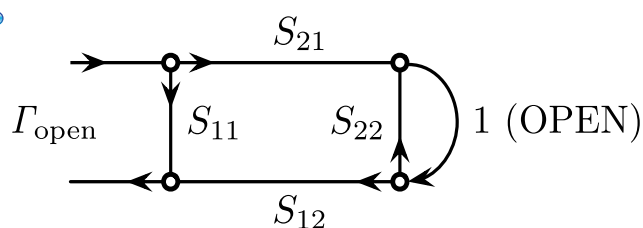
- $T_{F\Gamma} = T_F T_{\Gamma}$ より

$$S_{F\Gamma} = \frac{1}{1 - S_{22}^2} \begin{bmatrix} S_{11} - S_{11}S_{22}^2 + S_{22}S_{12}S_{21} & S_{12}S_{21} \\ S_{12}S_{21} & S_{11} - S_{11}S_{22}^2 + S_{22}S_{12}S_{21} \end{bmatrix}$$

- ▽ $S_{F\Gamma}$ を even/odd 変換すると

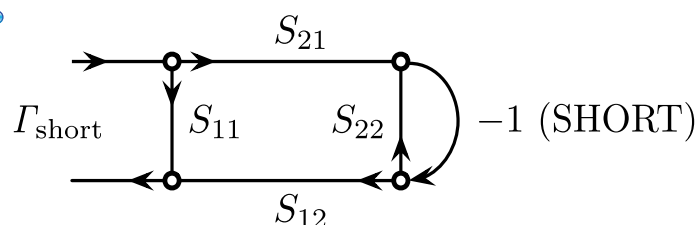
$$S_{F\Gamma e/o} = \begin{bmatrix} \frac{S_{11} - \det S_F}{1 - S_{22}^2} & 0 \\ 0 & \frac{S_{11} + \det S_F}{1 + S_{22}^2} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \Gamma_{\text{open}} & 0 \\ 0 & \Gamma_{\text{short}} \end{bmatrix}$$

- ▽ Γ_{open} は S_F のポート 2 をオープンで終端してポート 1 をのぞき込んだときの反射係数.



- $\Gamma_{\text{open}} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}}{1 - S_{22}} = \frac{S_{11} - S_{11}S_{22} + S_{12}S_{21}}{1 - S_{22}}$

- ▽ Γ_{short} は S_F のポート 2 をショートで終端してポート 1 をのぞき込んだときの反射係数.



- $$\Gamma_{\text{short}} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}} = \frac{S_{11} + S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}}$$

▼二等分定理

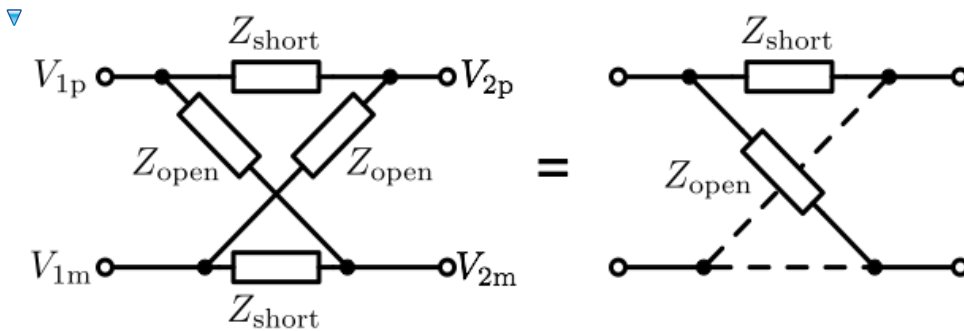
- 以上は「Bartlett の二等分定理」をSパラメータで表現したものとみなせる

▼対称格子形回路

- 軸対称な 2-port は下記の対称格子形回路で表現できる

- $$Z_{\text{open}} = Z_{\text{ref}} \cdot \frac{1 + \Gamma_{\text{open}}}{1 - \Gamma_{\text{open}}}$$

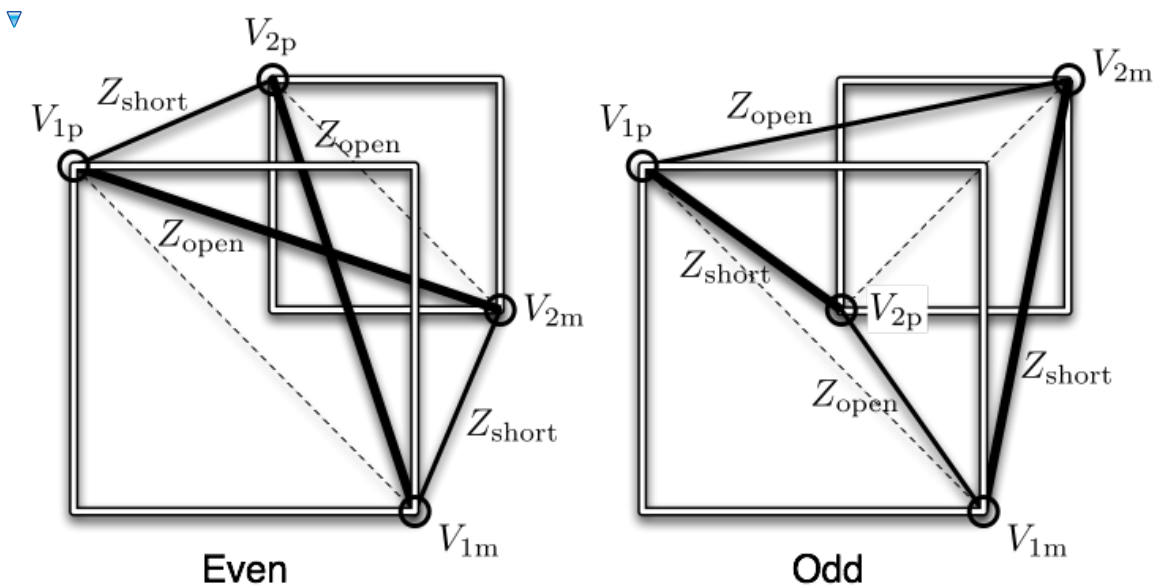
- $$Z_{\text{short}} = Z_{\text{ref}} \cdot \frac{1 + \Gamma_{\text{short}}}{1 - \Gamma_{\text{short}}}$$



- 上の右側の図は略記法

- $$V_1 = V_{1p} - V_{1m}$$

- $$V_2 = V_{2p} - V_{2m}$$

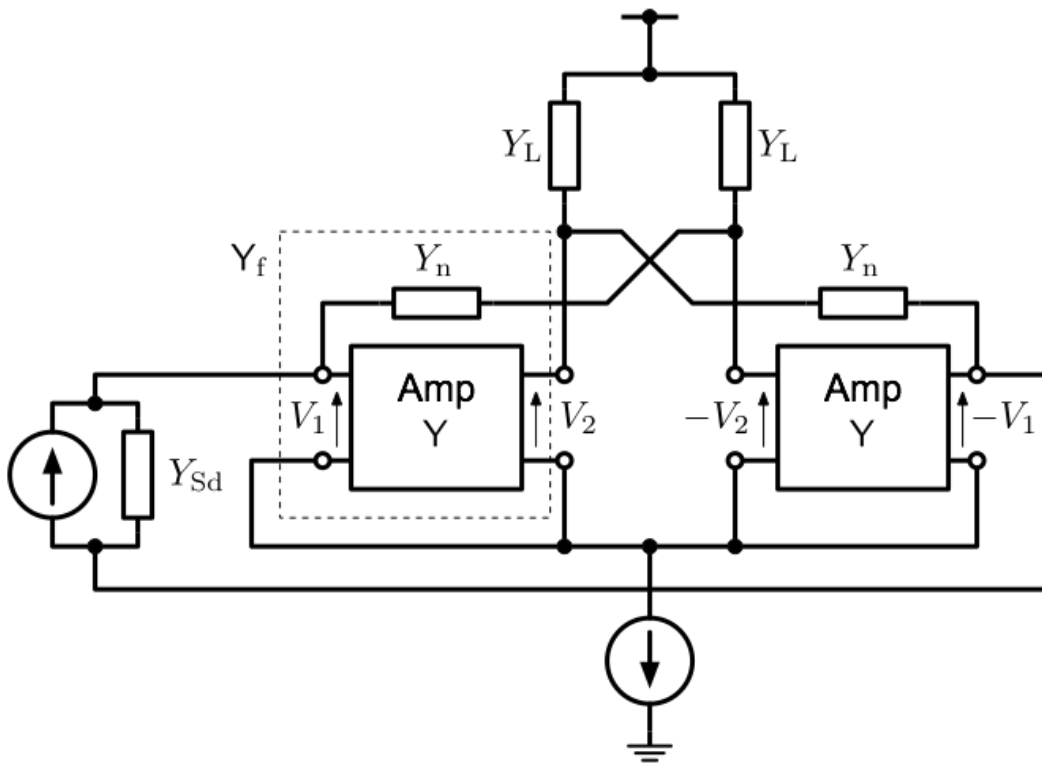


- $$V_e = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 + V_2) \quad (\text{Even})$$

- $$V_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 - V_2) \quad (\text{Odd})$$

- Even モードでは「平面のまま傾けてる」から Z_{open} だけに電圧がかかる
- Odd モードでは「ねじってる」から Z_{short} だけに電圧がかかる

差動アンプの unilateralization



▼ フィードバックなしアンプの Y 行列を $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ とする.

▼ たとえば

$$Y = \begin{bmatrix} j\omega(C_{gs} + C_{gd}) & -j\omega C_{gd} \\ g_m - j\omega C_{gd} & g_o + j\omega(C_{gd} + C_{ds}) \end{bmatrix}$$

▼ $Y_n = -Y_{12}$ とすると、フィードバックつきアンプの Y 行列 Y_f が unilateral になる

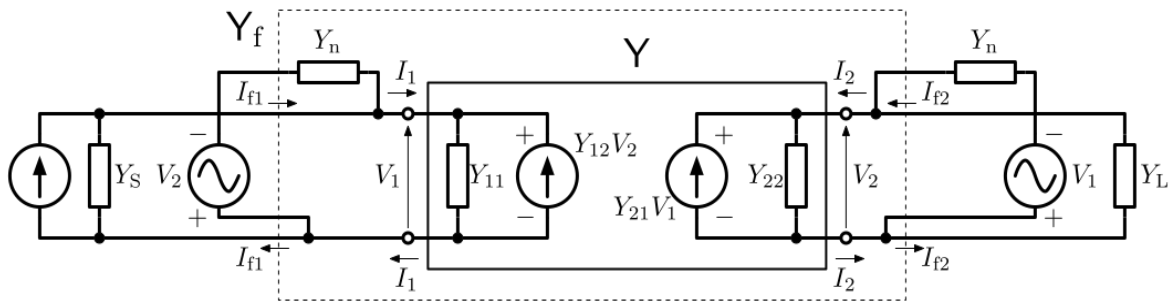
$$Y_f = \begin{bmatrix} Y_{f11} & 0 \\ Y_{f21} & Y_{f22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_n & 0 \\ Y_{21} + Y_n & Y_{22} + Y_n \end{bmatrix}$$

• $Y_n = j\omega C_{gd}$ とすると

$$Y_f = \begin{bmatrix} j\omega(C_{gs} + 2C_{gd}) & 0 \\ g_m & g_o + j\omega(2C_{gd} + C_{ds}) \end{bmatrix}$$

▼ 導出

• 片側について考える



• 上の図より

$$I_{f1} = Y_n(V_1 + V_2) + I_1$$

$$I_{f2} = Y_n(V_1 + V_2) + I_2$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{f1} \\ I_{f2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_n & Y_n \\ Y_n & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_n & Y_{12} + Y_n \\ Y_{21} + Y_n & Y_{22} + Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \\ &\triangleq Y_f \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$