## 演習 1-A.　理想 Bose 気体の定積比熱

(1) まず、化学ポテンシャル $\mu$ を求めよう。

a) 3 次元空間では粒子密度（粒子数/体積）$n$, 温度 $T$ ,$\alpha = -\mu/k_{\rm B}T$ の間には次の関係があることを示せ。

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x+\alpha}-1}\,dx - \frac{h^3}{2\pi(2mk_{\rm B})^{3/2}}\frac{n}{T^{3/2}} = 0 \qquad (T > T_{\rm c}) \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x}-1}\,dx - \frac{h^3}{2\pi(2mk_{\rm B})^{3/2}}\frac{n-n_0}{T^{3/2}} = 0 \qquad (T \le T_{\rm c}) \tag{2}$$

ここで $T_{\rm c}$ は Bose-Einstein 凝縮の臨界温度で, $n_0$ は 1 粒子最低エネルギー状態にある粒子密度, $m$ は Bose 粒子の質量である。

b) Gauss-Legendre 積分を用いて

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x}-1}\,dx \tag{3}$$

を計算せよ。さらに上の積分で積分変数を $t = x^{1/2}$ で変数変換した後に同じことを実行せよ。変数変換した方が精度がよいのはなぜか？

この値と液体 $^4$He のモル容積（27.6cm$^3$/mol）と原子質量（$6.7 \times 10^{-27}$kg）を用いて $T_c$ を評価してみよ。以下 $n$,$m$ に対しては液体 $^4$He の値を用いることにする。

c) (1) 式の左辺を $\alpha$ の関数と考え,Newton-Raphson 法を用いて与えられた $T$ に対し $\alpha$ を求めるプログラムを書け。次に $T$ を変えてこの方法をくり返し行うことにより $\mu$ と $T$ の関係をグラフにプロットせよ。

(2) 上で求めた $\alpha$ を用いて定積比熱 $C_{\rm V}$ を計算しよう。

a) 単位体積あたりの定積比熱 $C_{\rm V}$ は次のように書けることを示せ。

$$C_{\rm V} = \frac{2\pi k_{\rm B}}{h^3}(2mk_{\rm B}T)^{3/2}\left\{\frac{5}{2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{x+\alpha}-1}\,dx - \frac{3}{2}T\left(\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)_n\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x+\alpha}-1}\,dx\right\} \tag{4}$$

b) (1) の c) 方法で $\alpha$ 及び $(\frac{\partial\alpha}{\partial T})_n$ 求め, さらに Gauss-Legendre 積分を使って単位体積あたりの定積比熱を求めよ。そして $C_{\rm V}$ と $T$ の関係をグラフにプロットせよ。($T_{\rm c}$ の前後でくさび型の構造があらわれる。なぜこのような形になるのかその物理的な意味についても考えてみよ。)

c) さらに余裕のある人は内部エネルギーを求める, あるいは P-V-T 図を描くなどを試みよ。(ヒント：必要ならば、次の公式を用いよ。

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(\alpha,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}f(\alpha,x)\,dx \tag{5}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_{x=a}^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{6}$$

)