練習問題 2

(1) (b-1) の方法で指数分布

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (0 < x < \infty)$$

に従う乱数を発生するプログラムを作れ。作成したプログラムを用いて得られた N 個の乱数 $\{x_i\}$ に対して平均値 $\langle x \rangle = \frac{1}{N}(\sum_i x_i)$ および分散 $\frac{1}{N}\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ を求め、理論値と比較せよ。

(1) (b-3) のメトロポリス法で指数分布に従う乱数を生成するプログラムを作成せよ。その際、状態遷移の方法として、各ステップごとに区間 $[-r : r]$ の一様乱数 ξ を一つ生成し、あるステップ i における状態 x_i に対し、次の状態の候補 x_{i+1} は $x_{i+1} = |x_i + \xi|$ とする。得られた乱数 $\{x_i\}$ に対して区間を適当に分割し、ヒストグラムを作成し、ステップを十分増やせば指数分布に近づくことを確かめよ。また、r としてどのような値を選べは効率良く乱数が生成できるだろうか？

(2) 平均値 0、分散 1 のガウス分布（正規分布）

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2}\Bigr) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を近似的に得る方法は区間 $[0 : 1]$ の一様乱数 ξ_i を 12 個足し合わせたものから 6 を引いたもの $X = \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6$ を乱数として用いることである。なぜか？実際にこの方法を行うプログラムを作成し、区間を分割してヒストグラムをとることにより、このことを確かめよ。

(3) 原点から出発し、一回の歩幅が h である二次元のランダムウォークで n 歩進んだときの原点からの距離の二乗の平均値はいくらになるか？これを行うプログラムを書き、結果を理論値と比較せよ。またその分布はどうなるか？なお、単位円周上で一様に分布する座標 (x, y) を求める、効率の良いアルゴリズムは次のようなものである。

1) s,t を区間 [-1:1] の一様乱数で決める。

2) $r = s^2 + t^2$ が 1 以上なら 1) へもどって s,t を決めなおす。

3) $x = \frac{s^2 - t^2}{r}$, $y = \frac{2st}{r}$ で x, y を求める。

（この方法だと一度も cos, sin, sqrt 等の関数を呼ぶ必要がない。）