6. 差分法による微分方程式の解

a) ヌメロフ (Noumerov) の方法

以下の形の微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = G(x)\varphi(x) \tag{1}$$

で左辺の微分を差分に置き換えると

$$\frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} = G(x)\varphi(x) \tag{2}$$

すなわち、

$$\varphi(x+h) = (2 + h^2G(x))\varphi(x) - \varphi(x-h) \tag{3}$$

となる。$\varphi(x_0)$ および $\varphi(x_1)$ （$x_1 = x_0+h$）が初期値として与えられると $\varphi(x_i)$ （$x_i = x_0+ih$）は漸化式 (3) を用いることにより近似的に求めることができる。ところで、(2) 式の左辺は $\varphi(x \pm h)$ を h でテーラー展開することにより

$$\frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} = \varphi''(x) + \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x) + O(h^4) \tag{4}$$

となる。従って、(3) 式で微分を差分で置き換えたことによる誤差は $\approx \frac{h^4}{12}\varphi^{(4)}(x)$ 程度であることがわかる。しかしながら、(4) 式の左辺の差分で $\varphi(x)$ を以下に示す $y(x)$ で置き換えると (4) 式の右辺の h^2 の項は打ち消される。（確かめよ！）

$$y(x) = (1 - \frac{h^2}{12}G(x))\varphi(x) \tag{5}$$

よって、(3) 式の代りに

$$y(x+h) = 2y(x) - y(x-h) + h^2G(x)\varphi(x) \tag{6}$$

を用いると誤差は h^6 程度に改善される。（ヌメロフの方法）