平成 13 年 6 月 20 日

物理科学セミナー B　演習問題　**11**

1. 連立 1 階微分方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(a) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1、λ_2、固有ベクトル $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix}$、$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ。

(b) 行列 $Q = (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ と置くとき、変換 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって、与えられた微分方程式が以下の形に書けることを示せ。

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y_1 \\ \frac{d}{dt}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

さらに、この y_1、y_2 についての微分方程式の一般解を求めよ。

(c) 逆変換 $\vec{x} = Q\vec{y}$ により、与えられた連立微分方程式の一般解を求めよ。

(d) $t = 0$ のとき、$x_1 = 1$、$x_2 = 0$ となるような解を求めよ。

2. 連立 1 階微分方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を解こう。

(a) 行列 $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値 λ、固有ベクトル $\vec{q}$ を求めよ。

(b) $B\vec{v} = \lambda\vec{v} + \vec{q}$ を満たす $\vec{v}$ を求めよ。

(c) $P = (\vec{q}, \vec{v})$ として変数変換 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ により、$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y_1 \\ \frac{d}{dt}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と書けることを示せ。さらに、この y_1、y_2 に対する微分方程式を解け。

(d) 逆変換 $\vec{x} = P\vec{y}$ により、この微分方程式の一般解を求めよ。

3. 電荷 q を持った質量 m の粒子が一様な磁場 (磁束密度 $\vec{B}$) の中で運動しているとき、この粒子の速度を $\vec{v}$ とするとローレンツ力 $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ が働く。

(a) 磁場が z 軸方向を向いているとき、$(B_x = B_y = 0$、$B_z = B > 0)$ この粒子の運動方程式をたて、一般解を求めよ。

(b) 時刻 $t = 0$ で粒子が原点 $\vec{r} = 0$ におり、x 軸に沿って初速度 v_0 を持っている $(v_x = v_0$、$v_y = v_z = 0$) としてこの粒子の運動を求めよ。それはどのような運動か？