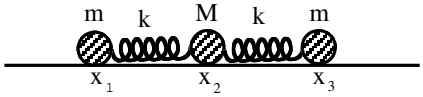
平成 13 年 6 月 27 日

物理科学セミナー B　演習問題　12

1. 摩擦のない水平な面の上に下図のように x 軸にそって 3 個の質点がバネ定数 k のバネで互いに連結されている。この 3 個の質点の x 軸方向の平衡位置からのずれをそれぞれ x_1、x_2、x_3 とするとき、



(a) ニュートン方程式を求めよ。(x 軸方向の運動のみを考えることとする。)
(b) 基準振動を求めよ。また、それらはどのような運動に対応しているか？
(c) 時刻 $t = 0$ で、$x_1 = x_2 = x_3 = 0$、$dx_1/dt = dx_3/dt = 0$、$dx_2/dt = v_0$ という初期条件のもとで、ニュートン方程式を解け。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し、以下の問いに答えよ。
(a) この行列の固有値 λ_1、λ_2 と対応する固有ベクトルを $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$ とするとき、行列 $Q = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ を用いて

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

と表されることを示せ。
(b) 上の事実を用いて、A^n を求めよ。(以下で I は単位行列)
(c) 以下を求めよ。

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \quad (= I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots)$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ とするとき、連立 1 階線形微分方程式 $\frac{d}{dt}\vec{x(t)} = A\,\vec{x(t)}$、すなわち

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

について考えよう。
(a) 以下の関係が成り立つことを示せ。

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}(t_0)$$

(b) 行列 A の固有値を λ_1 と λ_2、対応する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$ とするとき、$Q = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ として

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

と書けることを示し、問題 2 の結果を参考にして $e^{(t-t_0)A}$ を計算し、初期条件 ${}^t\vec{x}(0) = (1, 0)$ のもとに微分方程式を解け。