平成 13 年 7 月 4 日

物理科学セミナー B　演習問題　13

1. 微分方程式

$$\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = 0$$

について、解が級数

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

で表されると仮定して、この級数を微分方程式に代入し、各項の係数を比較することにより、解を求めよ。また、得られた解は a_0 を任意定数と考えるとき、今まで習った他の方法で求めた一般解と一致していることを確かめよ。

2. 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + y(x) = 0$$

について、問 1 と同様に解が級数 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で表されるとして、級数解を求めよ。(a_0、a_1 を任意定数と考える。) また得られた解が今まで習った他の方法で求めた一般解と一致していることを確かめよ。

3. 微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2x\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = 0$$

の級数解を問 1,2 と同様にして求めよ。またこの解が

$$y(x) = a_0\Big(1 - \frac{1}{2}x\log\frac{1+x}{1-x}\Big) + a_1 x$$

と表されることを示せ。

4. Cauchy の積分定理あるいは留数定理を用いて以下の定積分を計算せよ。

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

(c)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$$

(d)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

(e)

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$$