平成 13 年 4 月 18 日

物理科学セミナー B　演習問題　2

1. テーラー展開を用いてオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を導け。
2. テーラー展開を用いて $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ を示せ。
3. オイラーの公式を用いて以下の問題に答えよ。
   (a)　以下の公式を導け。

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos(\theta + \varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\theta + \varphi) &= \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{aligned}$$

   (b)　次の複素数を $re^{i\theta}$ $(r, \theta$ は実数$)$ の形に表せ。
      i) $4i$
      ii) -1
      iii) $1 + i$
      iv) $1 - \sqrt{3}i$
   (c)　次を計算せよ。
      i) $(1 - i)^9$
      ii) $(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^{12}$
4. 複素数 z に対する次の方程式を解け。
   (a) $z^3 = 1$
   (b) $z^4 = i$
   (c) $e^z = 1 + i$
5. オイラーの公式を応用して次の不定積分を求めよ。
   (a) $\int e^{ax} \cos bx \, dx$
   (b) $\int \cos^3\theta \, d\theta$
6. 次の行列の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。
   (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$