平成 13 年 5 月 9 日

物理科学セミナー B　演習問題　5

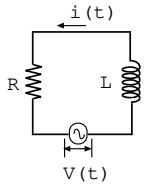
1. 次の 1 階微分方程式を解け。
   (a)　$y' + 2y = e^t$　　($t = 0$ のとき $y = 1$)
   (b)　$y' + y = \cos t$　　($t = 0$ のとき $y = 3/2$)
   (c)　$y' + ty = t$　　($t = 0$ のとき $y = 2$)
2. 次の $y(t)$ に対する 1 階微分方程式、

$$\frac{dy(t)}{dt} + k(t)y(t) = p(t)$$

   で初期条件 $y(t_0) = y_0$ を満たす解は

$$y(t) = y_0 \exp\Big[-\int_{t_0}^{t} k(u)\,du\Big] + \int_{t_0}^{t} p(u) \exp\Big[-\int_{u}^{t} k(s)\,ds\Big]\,du$$

   であることを微分方程式にこの解を直接代入することにより確かめよ。
3. 下図のような抵抗 R、コイル L、外部起電力 $V(t)$ からなる回路があるとする。



   この回路に流れる電流を $I(t)$ とすると $I(t)$ の満たす微分方程式は

$$L\frac{d\,I(t)}{dt} + R\,I(t) = V(t)$$

   である。$I(0) = 0$ であるとして、以下の場合にこの微分方程式を解け。
   (a)　$V(t) = V_0$
   (b)　$V(t) = V_0 \sin \omega t$
4. ある放射性物質 A は、崩壊係数 $\lambda_{\rm A}$ で放射性物質 B に崩壊し、さらに B は崩壊係数 $\lambda_{\rm B}$ で安定な物質 C に崩壊するものとする。このとき、時刻 t での物質 A、B の原子数をそれぞれ $A(t)$、$B(t)$ とすると、次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_{\rm A} A(t); \quad \frac{dB(t)}{dt} = -\lambda_{\rm B} B(t) + \lambda_{\rm A} A(t)$$

   (a)　初期条件、$A(0) = A_0$、$B(0) = 0$ のもとに上の微分方程式を解け。
   (b)　物質 B の原子数が最大になる時刻を求めよ。