平成 13 年 5 月 30 日

物理科学セミナー B　演習問題　8

1. $\varphi(\vec{r})$、$\psi(\vec{r})$ をスカラー場、$\vec{A}(\vec{r})$ をベクトル場とするとき、発散 div、勾配 grad に関する以下の公式を導け。
   (a) $\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\mathrm{grad}\psi + \psi\mathrm{grad}\varphi$
   (b) $\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) = (\mathrm{grad}\varphi)\cdot\vec{A} + \varphi\mathrm{div}\vec{A}$
2. 次のベクトル場 $\vec{A}$ の発散 $\mathrm{div}\vec{A}$ を求めよ。
   (a) $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$
   (b) $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}/r^3$
   (c) $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{d}/r^3 + 3(\vec{d}\cdot\vec{r})\vec{r}/r^5$ (ここで $\vec{d}$ は $\vec{r}$ に依存しないあるベクトル)
3. 次の $x(t)$ に対する 2 階微分方程式を解け。
   (a) $x'' + 2x' + x = 8e^{3t}$
   (b) $x'' + 9x = 2t^2 + 4t + 7$
   (c) $x'' + 9x = -2\cos t$
   (d) $x'' - 2x' + x = e^t \sin 3t$
   (e) $x'' - 2x' + x = t^2 e^t$
4. 2 階微分方程式、

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - (r_1 + r_2)\frac{dy(x)}{dx} + r_1 r_2 y(x) = f(x)$$

   の一般解を求めよう。(ただし、$r_1 \neq r_2$ とする。)
   (a) $u(x) = dy(x)/dx - r_1 y(x)$ と置くことにより、上の微分方程式は $u(x)$ についての 1 階微分方程式になる。これを示せ。
   (b) 上の $u(x)$ についての微分方程式の一般解を求めよ。
   (c) 上の結果を用い $y(t)$ の 2 階微分方程式の一般解を求め、それが

$$y(x) = \frac{1}{r_1 - r_2}\left\{e^{r_1 x}\int e^{-r_1 x} f(x)\,dx - e^{r_2 x}\int e^{-r_2 x} f(x)\,dx\right\} + c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

   となることを示せ。
   (d) $f(x) = A\cos\omega x$ の場合に一般解を求めてみよ。
5. 次の $x(t)$ に対する微分方程式を解け。
   (a) $x''' + x = 0$
   (b) $x''' + 2x'' - x' - 2 = 0$
   (c) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$
   (d) $x''' - 6x'' + 12x' - 8x = 0$