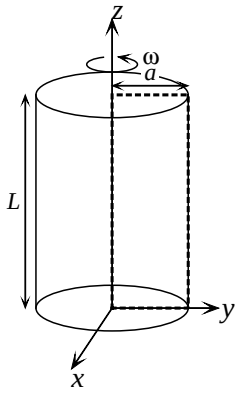
平成 15 年 4 月 17 日

電磁気学演習 **No.2** (ベクトル解析の復習)



問 **1*** 右図のように z 軸を中心軸とする長さ L, 半径 a の円柱内部に電荷が電荷密度 ρ で一様に分布している. この円柱が中心軸の周りに角速度 ω で回転しているとして, 以下の問いに答えよ.

(a) 電流密度 J を求めよ.

(b) 図中で破線で示された長方形を横切る電流 I を求めよ.

問 **2** * 次の等式を証明せよ.

(a) $\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \cdot \boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) f$

(b) $\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \times \boldsymbol{A} + (\nabla \times \boldsymbol{A}) f$

(c) $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$

問 **3** * $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるとき以下を計算せよ.

(a) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$

(b) $\nabla f(r)$

(c) $\nabla \times (\boldsymbol{r} f(r))$

(d) $\nabla^2 f(r)$

問 **4** * ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ に対して, x-, y-および z-軸を 3 辺とする一辺の長さ a の立方体の内部に対する積分 $\iiint \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV$ とその表面に対する積分 $\iint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を実行し, ガウスの定理が成り立っていることを確かめよ.

問 **5** ** 極座標系 (r, θ, ϕ) に対し,

(a) 第一基本量を求めよ.

(b) 極座標系での微小距離, 体積要素, 勾配, 回転, 発散を求めよ.

(c) スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = z/r^3$ の勾配を極座標表示で求めよ.

問 **6** ** ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = -x^2 y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ に対して, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ なる半球の表面に対する積分 $\iint (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}$ とその周である x-y 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ に対する積分 $\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算し, ストークスの定理が成り立っていることを確かめよ.

(資料)

(A) 3 次元デカルト座標系で $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x-, y-, z-軸方向の単位ベクトルとすると, スカラー場 $f(x,y,z)$ の勾配 (gradient), ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の回転 (rotation) および発散 (divergence) は以下のように定義される.

i) **勾配:** $\nabla f = \mathrm{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$

ii) **回転:** $\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$$= \Big(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big)\boldsymbol{k}$$

iii) **発散:** $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

(B) i) g, f をスカラー場, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ をベクトル場とすると以下の公式が成り立つ.

$$\nabla(fg) = f\nabla g + (\nabla f)g$$
$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\cdot \boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{A})f$$
$$\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\times \boldsymbol{A} + (\nabla \times \boldsymbol{A})f$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A}\times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla \times \boldsymbol{B})$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{A}\times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$$
$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$
$$\nabla \times (\nabla f) = \mathrm{rot}\ \mathrm{grad} f = 0$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0$$
$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

ii) **ガウスの定理:** V を任意の領域, S をその表面とすると,

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dV$$

iii) **ストークスの定理:** S を任意の曲面, C をその周とすると,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$$

(C) 勾配, 回転, 発散は次のように定義することもできる.

i) 勾配: $\Delta \boldsymbol{r}$ を微小変位, $\boldsymbol{l}$ を変位の方向の単位ベクトルとすると,

$$(\nabla f)\cdot \boldsymbol{l} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{\Delta r}\left\{f(\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r})\right\}.$$

ある点 $\boldsymbol{r}$ での勾配は, その点での f の単位長さ当たりの変化が最大となる方向を向いており, その絶対値はその方向での単位長さ当たりの f の値の変化を与えている. 勾配の方向は常に $f=$一定の面に対して垂直.

ii) 回転: $\boldsymbol{n}$ を微小な面の単位法線ベクトル, ΔS をその面積, ΔC をその周とすると,

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Delta C}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで, $\oint$ は閉じた曲線に対する線積分を表し, $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{A}$ の C に沿った循環あるいは渦量という. 保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の場合は循環がいかなる閉曲線に対してもゼロであるから, $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$が常に成り立つ.

iii) 発散: ΔV を微小領域の体積, ΔS をその表面とすると, 発散は,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

$\boldsymbol{A}$ を流体の速度場とみなせば, 右辺の積分は単位時間当りの微小領域表面 ΔS から流れ出す流体の体積に対応している.

(D) [1]直交曲線座標系を (u_1,u_2,u_3) とすると, 第一基本量 g_i とは座標 u_i を微小量 δu_i 変化させた時, u_i 方向への位置ベクトルの移動距離 δs_i が, $\delta s_i = g_i\delta u_i$ と書ける量である. 例えば, 座標点 (u_1,u_2,u_3) と座標点 $(u_1+\delta u_1,u_2,u_3)$ の間の距離は $g_1\delta u_1$ である. 第一基本量は, 以下の式から計算できる:

$$g_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}.$$

$\boldsymbol{e}_i$ を座標 u_i 方向の単位ベクトル, A_i をベクトル $\boldsymbol{A}$ の u_i 方向の成分とすると,

i) 微小距離: $ds = \sqrt{(g_1du_1)^2+(g_2du_2)^2+(g_3du_3)^2}$

ii) 体積要素: $dV = g_1g_2g_3\,du_1du_2du_3$

iii) 勾配: $\nabla f = \dfrac{1}{g_1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{g_2}\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{1}{g_3}\dfrac{\partial f}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3$

iv) 回転: $\nabla\times\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{g_1g_2g_3}\begin{vmatrix} g_1\boldsymbol{e}_1 & g_2\boldsymbol{e}_2 & g_3\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1A_1 & g_2A_2 & g_3A_3 \end{vmatrix}$

v) 発散: $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{g_1g_2g_3}\left(\dfrac{\partial g_2g_3A_1}{\partial u_1}+\dfrac{\partial g_3g_1A_2}{\partial u_2}+\dfrac{\partial g_1g_2A_3}{\partial u_3}\right)$

[1]「物理応用数学演習」(共立出版) **2.3** 章を参照