平成 15 年 4 月 24 日

電磁気学演習 **No.3** (点電荷に関するクーロンの法則とポテンシャル)

問 **1**$^*$ $x$ 軸上のある点 $\boldsymbol{r}_1 = (a, 0, 0)$ に点電荷 $q(> 0)$ が, また $\boldsymbol{r}_2 = (-a, 0, 0)$ に点電荷 $-q$ がある。以下の問いに答えよ.

(a) $z$ 軸上の電場 $\boldsymbol{E}$ をクーロンの法則より求めよ.

(b) $x$ 軸を含む平面における電気力線の大まかな形状を図示せよ.

(c) 任意の点 $(x, y, z)$ の電位 $\Phi$ を求めよ.

(d) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より $z$ 軸上の電場 $\boldsymbol{E}$ を再び求めよ.

問 **2**$^*$ $x$ 軸上の 3 点に点電荷 $q_{\rm A}$, $q_{\rm B}$ 及び $q_{\rm C}$ が置かれている. 点電荷 $q_{\rm A}$ の位置を原点とし, $q_{\rm B}$ 及び $q_{\rm C}$ の $x$ 座標を $x_{\rm B}$ 及び $x_{\rm C}$ とする. ただし, $q_{\rm C}$ は $q_{\rm A}$ と $q_{\rm B}$ をつなぐ線分上にある. すなわち, $0 < x_{\rm C} < x_{\rm B}$ である. 以下の問いに答えよ.

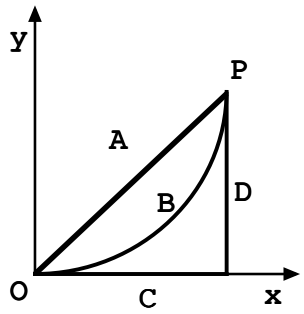
(a) 3 つの点電荷全てに力が働かない平衡状態を実現するためには, 3 つの電荷の比をどのように決めるべきか?

(b) 点電荷 $q_{\rm C}$ が $q_{\rm A}$ と $q_{\rm B}$ をつなぐ線分の中点にある場合, 平衡状態を実現するためには, 3 つの電荷の比をどのように決めるべきかを考えよ. さらに, このときの電気力線の形状を図示せよ.

問 **3**$^*$ 2 次元空間で定義された力 $\boldsymbol{F} = (2xy, \alpha x^2)$ ($\alpha$ は定数) に対して,

(a) 右図に示すような 3 つの経路, すなわち直線 O→A→P, 円弧 O→B→P ($y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$), 折れ線 O→C→D →P, を通って質点が点 $\mathrm{O}(0, 0)$ から点 $\mathrm{P}(a, a)$ に移動するときの仕事をそれぞれの経路について求めよ.

(b) $\alpha$ がいかなる値のとき, 力 $\boldsymbol{F}$ は保存力か? また、そのときのポテンシャルを求めよ.




問 **4** 点電荷 $-q$ が原点にあり, 点電荷 $q$ が位置ベクトル $\boldsymbol{d}$ にある.

(a)$^{**}$ この 2 つの点電荷の距離に比べて遠く離れた任意の点 $\boldsymbol{r}$ ($d \ll r$) におけるポテンシャルが以下で与えられることを示せ.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}$$

(b)$^*$ 上のポテンシャルより, 電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{d}}{r^3}\right)$$

となることを示せ.

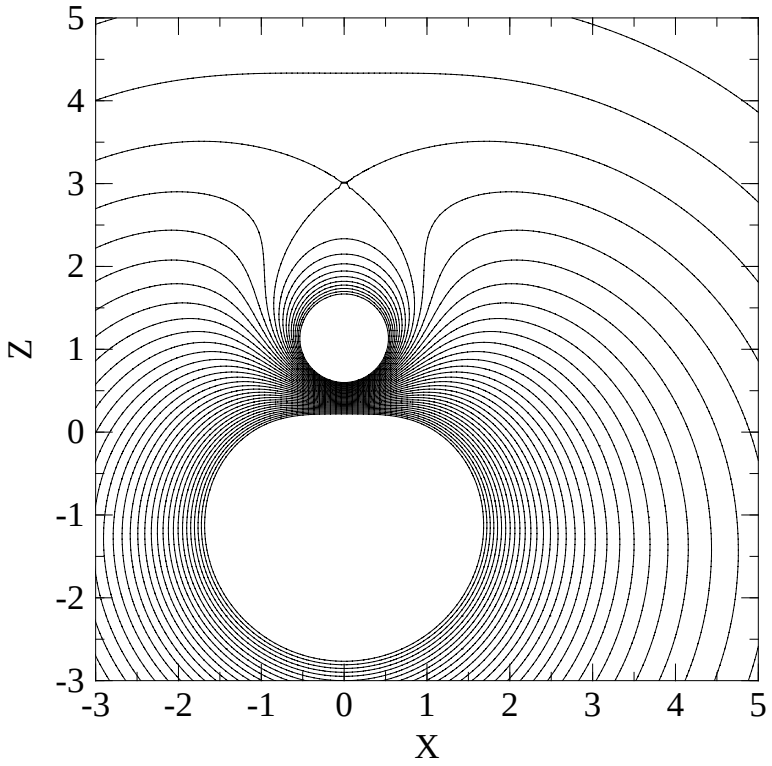
問 **5** ある点 $\boldsymbol{r} = (0, 0, a)$ に点電荷 $q$ $(> 0)$ が, また $\boldsymbol{r} = (0, 0, -a)$ に点電荷 $-4q$ がある. 以下の問いに答えよ.

(a) * 円柱座標で表された任意の点 $\boldsymbol{r} = (R, \phi, z)$ 上の電位 $\phi$ と電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ.

(b) ** $|\boldsymbol{E}| = 0$ を満たす平衡点 $\boldsymbol{r}_0$ を求めよ.

(c) *** $\boldsymbol{r}_0$ 近傍の電場を近似的に求め, $\boldsymbol{r}_0$ 近傍における電気力線の形状を図示せよ.

(d) *** $\boldsymbol{r}_0$ が荷電粒子にとって安定な点か不安定な点かを電気力線の形状より考察せよ.

(ヒント)

問 **5** で $a = q = 1$ としたときの等電位面の $x$-$z$ 平面での断面を以下に示す. 等電位面は $4\pi\varepsilon_0\phi = -2$ から $0$ までを $0.05$ 間隔で描いている. 等電位面 $4\pi\varepsilon_0\phi = -2, -1/2, 0$ に対応する線はどれか？ また, 電気力線を書き加えよ.