

【ガイダンス】

日程: 授業開始は 9 時から。12 月 5 日に中間試験、2 月 6 日に期末試験をおこなう予定。

授業の方法: 毎回演習問題を配るので、それをできるだけ時間内に解き、解けた人は板書し、解説をする。必要に応じて、授業の始めに小試験 (15 分程度) をすることもある。

成績: 期末試験 (30), 中間試験 (20), 発表 (30), 出席・小試験 (20) の配点で評価する。追試・救済レポート等は一切おこなわない。

連絡先: 田中 新 (居室: 先端研 307W, atanaka@hiroshima-u.ac.jp)。やむを得ない理由で欠席する場合は必ず事前に連絡すること。

TA (Teaching Assistant): 河野 佑紀 (D2)

ホームページ: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/atanaka/ST/ST.html>。演習問題は、このホームページにアップロードするので、欠席した場合などに活用のこと。

その他: 飲食物の持ち込みは禁止。授業時間中は携帯、スマートフォンは使用しないこと。

【演習問題】

問 1. 熱力学

熱力学の恒等式

$$dU = TdS + \mu dN - PdV$$

より、以下の関係式を導け。

(a) 内部エネルギー U に対し

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{N,V}, \quad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}, \quad P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N}$$

(b) dS を dU 、 dN 、 dV で表すことにより

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{N,V}, \quad \frac{\mu}{T} = - \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V}, \quad \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N}$$

(c) ヘルムホルツ (Helmholtz) の自由エネルギー $F = U - TS$ に対し

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N}, \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V}, \quad P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}, \quad U = -T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{F}{T} \right)_{V,N}$$

(d) ギブス (Gibbs) の自由エネルギー $G = F + PV$ に対し、 S 、 μ 、 V を (c) と同様に G の偏微分で表せ。

(e) Maxwell の関係式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,N}, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial P}{\partial N} \right)_{S,V}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{V,N}$$

を示せ。これ以外にも、(b)、(c)、(d) など、 U 以外の熱力学関数の全微分の式からも同様な関係式が 3 個ずつ得られる (ただし、全てが独立な関係式というわけではない)。

問 2. 場合の数

- (a) 5 個のあめ玉を 3 つの袋 A、B、C に入れる。このとき、1) あめ玉が区別できるとき (例えば、ミント味、イチゴ味など、全て種類が異なる) と 2) 区別できないとき (例えば全てミント味) の場合の数を求めよ。ただし、空の袋があってもよい。
- (b) 上を一般化して、 N 個のあめ玉を M 個の袋に分ける場合を考える (袋は区別できるとする)。あめ玉が区別できるときとできないときのそれぞれについて場合の数を求めよ。

ヒント: あめ玉が区別できない場合が分かりにくいと思うかも知れない。そのときは、例えば、袋が 3 つ、あめ玉が 6 個あるとすると、1 番目の袋に 3 個、2 番目の袋に 2 個、3 番目の袋に 1 個がある場合を、あめ玉「○」と袋を区別するための、しきり棒「|」を用いて

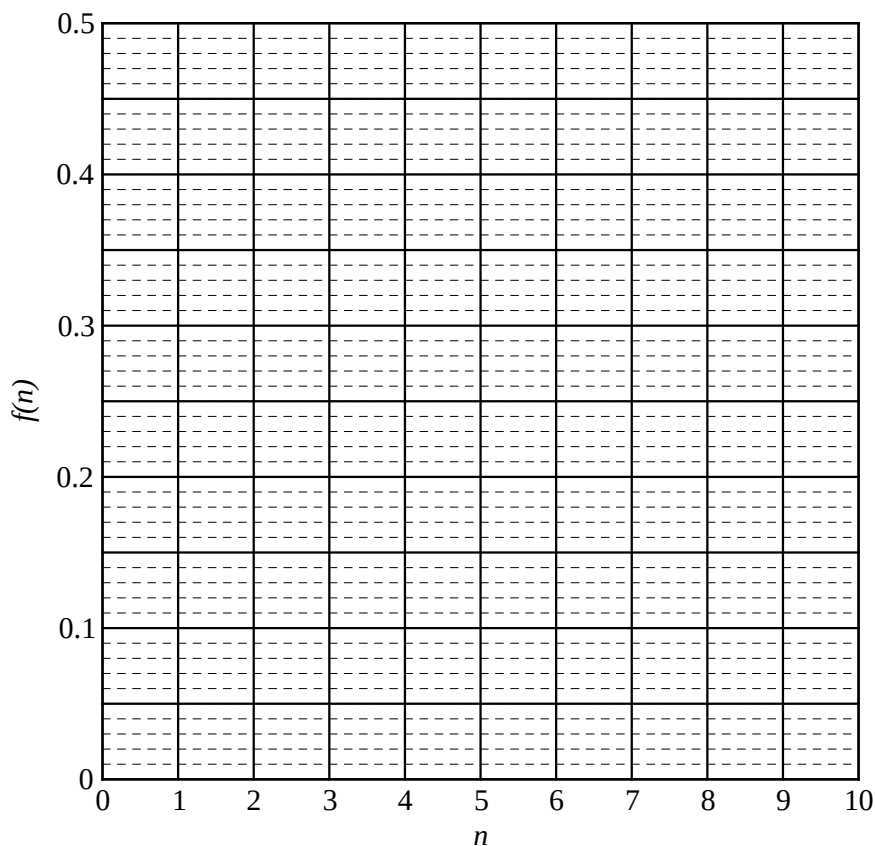
○○○|○○|○

などと表すことにして、場合の数を計算すると良い。

問 3. コイン投げ

十円玉を N 回投げて、表が出る回数を調べる。表、裏の出る確率が等しいとして、

- (a) 表が n 回出る確率 $f(n)$ を求めよ。
- (b) 10 回投げた場合の確率 $f(n)$ を横軸を n として以下にプロットせよ。(ヒント: パスカルの三角形を使えば簡単に計算できる。また、 $2^{10} = 1024 \sim 1000$ と近似してよい)



(c) 表が出る回数の平均値 $\langle n \rangle$ と分散 $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。すなわち

$$\langle n \rangle \equiv \sum_{n=0}^N n f(n)$$

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle \equiv \sum_{n=0}^N (n - \langle n \rangle)^2 f(n) = \sum_{n=0}^N n^2 f(n) - \langle n \rangle^2$$

を計算せよ。なお、分散の平方根 (今の場合、 $\sigma \equiv \sqrt{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle}$) は、標準偏差と呼ばれ、統計学では分布の広がりを表す目安としてよく用いられる (例えば、テストの得点分布など)。

ヒント: 少し問題を一般化して、表の出る確率を p 、裏の出る確率を $q (= 1 - p)$ とする。すると $f(n)$ は、 $(px + q)^N$ を x について展開したときの n 次項の係数で与えられる。(どうして、そうなるか考えてみよ!) $(px + q)^N$ を x について 1 回および 2 回微分して $x = 1$ 、 $p = 1/2$ と置くことで、上の計算に必要な $\sum n f(n)$ 、 $\sum n(n-1) f(n)$ の値を求めることができることを示せ。(もちろん p が一般の場合もついでに計算できる。)

(d) 十分大きい N に対して、 $f(n)$ が近似的にガウス分布に従うことを示せ。

ヒント: スターリング (Stirling) の公式を用いて階乗を $\log N! \sim N \log N - N$ と近似する。そして、 $f(n)$ が最大値をとる n の近傍 (つまり $n = N/2$) で n について $\log f(n)$ を 2 次の項までテーラー展開せよ。

問 4. 微視的状態の数

スピン $1/2$ の粒子が N 個、格子状に並んでいる。各格子点のスピンの z 成分は、 $1/2$ または $-1/2$ のどちらかを等確率でとるものとする (i 番目のスピンの状態を z 成分の符号を用いて $\sigma_i = \pm 1$ のように表すことにする)。これは、磁性体の簡単なモデルの高温極限に相当する。

(a) 取りうる全ての状態の数を求めよ。

(b) この系の磁化 M は、 μ_B をボーア磁子として、 $M = \mu_B \sum_i \sigma_i$ のように表せる。十分大きな N に対し、磁化の確率分布を求めよ。(ヒント: 問 3.(d) と同様の近似を用いるとよい)