問 1. Ising モデルでは系のエネルギー E は以下のように表わされる。

$$E(\{\sigma_i\}) = -J\sum_{\langle i,j\rangle}\sigma_i\sigma_j - \mu_{\mathrm{B}}H\sum_i \sigma_i$$

ここで、σ_i は格子点 i でのスピンの向きを表わし、ある決まった方向に対し、スピンが平行のとき、1 を反平行のとき、-1 をとるとする。$\sum_{\langle i,j\rangle}$ は最隣接の i, j の組に対しての和をとることを表わす。H は外部磁場である。いま、スピン間の相互作用 J が強磁性的（$J > 0$）として、以下の問に答えよ。

(a) ここで平均場近似を用いる、すなわち $\sigma_i\sigma_j \sim \sigma_i\langle\sigma_j\rangle + \langle\sigma_i\rangle\sigma_j - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle$ と仮定しよう。さらに強磁性秩序を仮定する、つまり全ての格子点で σ_i の期待値が等しいとする ($\langle\sigma_i\rangle = \langle\sigma\rangle$ とおく)。このとき、各格子点に対し z 個の最隣接格子点があるとすると、系のエネルギーが

$$E(\{\sigma_i\};\langle\sigma\rangle) = -\left(\mu_{\mathrm{B}}H + Jz\langle\sigma\rangle\right)\sum_i \sigma_i + \frac{JzN}{2}\langle\sigma\rangle^2$$

と表されることを示せ。ここで N は、全格子点の数である。

(b) (a) で得られた E の式は、有効磁場 $\mu_{\mathrm{B}}H_{\mathrm{eff}} \equiv \mu_{\mathrm{B}}H + Jz\langle\sigma\rangle$ 中の N 個の独立なスピンからなる系に対応していると見ることもできる。正準集団の考えに従って、分配関数、自由エネルギー $F(T,H;\langle\sigma\rangle)$ を求めよ。さらに付加的な変数 $\langle\sigma\rangle$ を決定するための方程式が、磁化 M ($\equiv \mu_{\mathrm{B}}\sum_i\langle\sigma_i\rangle$) が $M = -\partial F/\partial H$ から得られることを利用して

$$\langle\sigma\rangle = \tanh\left(\frac{Jz\langle\sigma\rangle + \mu_{\mathrm{B}}H}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

のように求められることを示せ。

(c) 上で求めた $\langle\sigma\rangle$ についての方程式から、$H = 0$ のとき、強磁性転移温度 T_{c} を求めよ。

(d) $H = 0$ のとき、転移温度 T_{c} 直下で、磁化が近似的に $M \propto (T_{\mathrm{c}} - T)^{1/2}$ と表されることを示せ。また、磁化 M を温度の関数として図示せよ。

問 2. 問 1 のイジングモデルについて

(a) $T > T_{\mathrm{c}}$ について、問 1(b) で求めた $\langle\sigma\rangle$ についての方程式から、帯磁率 $\chi = \lim_{H\to 0} M/H$ が

$$\chi = \frac{N\mu_{\mathrm{B}}^2}{k_{\mathrm{B}}}\frac{1}{T - T_{\mathrm{c}}}$$

と表されることを示せ。

(b) 問 1(a) から、$H = 0$ のとき、内部エネルギーが平均場近似の範囲で $U \equiv \langle E\rangle = -NJz\langle\sigma\rangle^2/2$ と書けることに注意して、低温、高温、T_{c} 近傍において、U および比熱 C を求めよ。また比熱を温度の関数として図示せよ。

(c) 温度が T_{c} のとき、弱い磁場を作用させると、磁化が $M \propto H^{1/3}$ となることを示せ。