

問 1. 理想ボーズ気体における Bose-Einstein 凝縮

体積 V の容器の中に N 個の相互作用のない Bose 粒子がある場合を考える (理想 Bose 気体)。粒子の持つ内部自由度 (例えばスピンのような) は考えないこととして、以下の問いに答えよ。

- (a) 1 粒子状態の状態密度を $D(\epsilon)$ とすると

$$N = \int_0^{\infty} D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \quad (1)$$

と書けることを用いて、 N と化学ポテンシャル μ の間には、十分高温で

$$N = V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} F_{3/2}(e^{\mu/k_B T}) \quad (2)$$

のような関係があることを示せ。ここで、 $F_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^s$ とした。

- (b) 理想 Bose 気体では 1 粒子基底状態のエネルギーを ϵ_0 とすると化学ポテンシャルは $\epsilon_0 \geq \mu$ でなければならない。その理由を説明せよ。また、この条件のもとに、(a) の式 (1) の右辺は $\mu = 0$ のとき、最大でかつ有限の値を取ることを示し、それゆえ、粒子数 N を一定とすると、ある温度以下で、式 (1) が満たされなくなることを示す。すなわち、 μ が求まらないことを示せ。

- (c) ある温度以下で、式 (1) を満たす μ が存在しないという矛盾は本来、離散的な 1 粒子状態の状態密度を滑らかな関数 $D(\epsilon)$ で近似したこと起因する。この近似をしないなら、 N は i 番目の 1 粒子状態の占有数とエネルギーをそれぞれ n_i 、 ϵ_i とすると

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} \langle n_i \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \quad (3)$$

のように表される。この場合、 $\epsilon_0 \geq \mu$ の条件のもとに μ を ϵ_0 に近づけることで、1 粒子基底状態の占有数をいくらでも大きくできて、それゆえ、式 (3) を満たす μ がいつも存在することを示せ。

- (d) (b)、(c) での考察から、理想ボーズ気体では、ある転移温度以下で 1 粒子基底状態にある粒子数が N のオーダーになると考えられる (Bose-Einstein 凝縮)。この転移温度 T_c はいくらか？ また、1 粒子基底状態にある粒子数を N_0 とすると、転移温度以下で、

$$N = N_0 + V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} F_{3/2}(1) \quad (4)$$

が満たされることを示せ。

- (e) 液体 He^4 を理想 Bose 気体と見なして T_c を計算せよ。必要なら、液体 He^4 のモル容積 ($27.6 \text{ cm}^3/\text{mol}$)、原子質量 ($6.7 \times 10^{-24} \text{ g}$) および $F_{3/2}(1) \approx 2.612$ を用いよ。なお、液体 He^4 は 2.19 K で相転移し、この温度以下で超流動性を示す。

- (f) T_c 以下で 1 粒子基底状態にある粒子数 N_0 が以下のように書けることを示せ。

$$N_0 = N \left\{ 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right\}$$

問 2. 理想ボーズ気体の比熱

問 1 で、内部エネルギー E が $T > T_c$ で

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \frac{F_{5/2}(e^{\mu/k_B T})}{F_{3/2}(e^{\mu/k_B T})}$$

となることを示せ。また、 T_c 以下では

$$E = \frac{3}{2} \frac{F_{5/2}(1)}{F_{3/2}(1)} N k_B T \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

であることを示し、 T_c 以下での比熱 C_V を求めよ。なお、 $F_{5/2}(1) \approx 1.341$ である。

問 3. 理想ボーズ気体における高温展開

- (a) 理想 Bose 気体について、縮退の弱い場合 ($\exp(-\mu/k_B T) \gg 1$)、No.7 の問 4 と同様に、以下の式を導け。

$$\exp(-\mu/k_B T) = \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{n h^3} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{n h^3}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \right\}$$

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \left\{ 1 - \frac{n h^3}{2^{5/2} (2\pi m k_B T)^{3/2}} \right\}$$

- (b) 温度が等しいとして、同じ体積 V の箱に同数の理想 Bose 気体と理想 Fermi 気体をつめた場合、どちらの圧力が大きいのか? (ヒント: No.7 の問 4 の関係式を用いよ。)

問 4. Bose-Einstein 凝縮と次元

2 次元の理想 Bose 気体では、Bose-Einstein 凝縮が起こらないことを示せ。