

補充問題 (2011/04/20)

9 以下を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

10 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ について, $A^2 = O$ が成り立つための条件を求めよ.

11 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

が成り立つことを確かめよ.

(注意. この等式が成り立つことをケーリー・ハミルトンの定理 (の2次正方行列版) という.)

12 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, a, b, c は正の整数とする.

(1) $A^2 = 3A$ が成り立つように a, b, c を定めよ.

(2) a, b, c が (1) で定めた値のとき, A^n を n と A を用いて表せ. ただし, n は任意の正の整数とする.