☆★☆★☆★☆　補充問題 (2011/10/27)　☆★☆★☆★☆

$\boxed{\textbf{59}}$ 平面上の線型変換 f, g の表現行列がそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

のとき, $g \circ f$, $f \circ g$ の表現行列をそれぞれ求めよ.

$\boxed{\textbf{60}}$ 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を表現行列にもつ平面上の線型変換 f について以下の問題に答えよ.

(1) f の逆変換 f^{-1} を求めよ.

(2) f によって点 $(-1, 1)$ に移される点の座標を求めよ.

$\boxed{\textbf{61}}$ 平面上の原点を回転の中心とした角度 $\dfrac{\pi}{6}$ の回転を f とするとき, f を 30 回合成した変換の表現行列を求めよ.

$\boxed{\textbf{62}}$ **(難)** 平面上において, 原点を通り x 軸の正の方向とのなす角が θ である直線を ℓ とし, x 軸に関する線対称を f, 直線 ℓ に関する線対称を g とする. このとき, 以下の問題に答えよ.

(1) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が g によって点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に移るとき, $\mathrm{P}'(x', y')$ を x, y, θ を用いて表せ. (ヒント: 直線 ℓ が線分 PP' の垂直二等分線であることを使え.)

(2) (1) を利用して合成変換 $g \circ f$ の表現行列を求めよ.

注意. $\boxed{\textbf{62}}$ は, 平面上の回転は高々 2 つの線対称移動の合成に等しいことの証明を与えている. このことは**カルタン・デュドネの定理 (の 2 次元版)** として知られている.