☆★☆★☆★☆　**補充問題 (2011/11/10)**　☆★☆★☆★☆

$\boxed{\textbf{63}}$ 以下の 2 次正方行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．また, 対角化可能なものについては対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{64}}$ 正方行列 A の対角成分の和を ***A* のトレース (trace of *A*)** といい, $\mathrm{Tr}\,A$ もしくは $\mathrm{Tr}(A)$ と表わす．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の場合, $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ である．トレースに関して, 以下の問題に答えよ．

(1) 2 次正方行列 A の固有方程式は $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + |A| = 0$ であることを証明せよ．ただし, $|A|$ は A の行列式である．

(2) A, B が 2 次正方行列の時, $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) A が 2 次正方行列で, c が定数の時, $\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) A, B が 2 次正方行列の時, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ が成り立つことを証明せよ．

(5) A が 2 次正方行列で, P が 2 次正則行列の時, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$ が成り立つことを証明せよ．

(6) 2 次正方行列 A の固有値が α, β の時, $\mathrm{Tr}(A) = \alpha + \beta$ および $|A| = \alpha\beta$ が成り立つことを証明せよ．

注意. $\boxed{\textbf{64}}$ の (2) から (6) は, 一般に n 次正方行列の場合に成り立つ．