

補充問題 (2011/11/17)

65 以下の 2 次対称行列を直交行列を用いて対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

66 二元二次形式 $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$ の標準形を求めよ. また, 平面二次曲線 $f(x, y) = 3$ の概形を図示せよ.

67 二元二次形式 $f(x, y) = 4x^2 - 6xy - 4y^2$ の標準形を求めよ. また, 平面二次曲線 $f(x, y) = 5$ の概形を図示せよ.

68 平面上の原点を回転の中心とした角度 θ の回転が直交変換であることを証明せよ.
(ヒント: 表現行列が直交行列であることをチェックせよ)

69 f, g を平面上の直交変換とするとき, f と g の合成 $g \circ f$ も平面上の直交変換であることを証明せよ (このことから直交行列の積は直交行列であることが従う).

70 直交行列の行列式の値は 1 か -1 であることを証明せよ.
(これは 2 次でなくとも成り立つ)

71 f を平面上の直交変換とするとき, f の逆変換 f^{-1} も平面上の直交変換であることを証明せよ (このことから直交行列の逆行列は直交行列であることが従う).

72 f を平面上の直交変換とし, その表現行列を A とする. 平面ベクトル p, q はそれぞれ f によって p', q' に移るとき, 以下を証明せよ.

(1) $p \cdot q = p' \cdot q'$,

(2) p と q のなす角と, p' と q' のなす角は等しい.