☆★☆★☆★☆　補充問題 (2012/01/12)　☆★☆★☆★☆

$\boxed{\mathbf{73}}$ 次の 3 次正方行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化できるか答えよ. また, 対角化できる場合は対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{74}}$ 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とするとき,

$$|A - \lambda E| = (-1)^3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

が成り立つ. このことを用いて, 以下を証明せよ.

(1) $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

(2) A が正則のとき, A の固有値はすべて 0 ではない