☆★☆★☆★☆　**補充問題 (2012/01/19)**　☆★☆★☆★☆

$\boxed{\mathbf{75}}$ 次の 3 次対称行列を直交行列を用いて対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & -8 \\ 8 & -8 & -4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{76}}$ 変数 x, y, z に関する二次式

$$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx \qquad (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \text{ は定数})$$

を**三元二次形式**, または**空間上の二次形式**という. 上の三元二次形式 $F(x,y,z)$ は 3 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}$$

と対応する. A を直交行列で対角化することにより, 二元二次形式の時と同様に標準形 $F'(u,v,w) = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$ に変形できる. このことを利用して以下を解け.

(1) 三元二次形式 $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ の標準形 $F'(u,v,w)$ を求めよ.

(2) 三元二次形式 $4xy + 4yz + 4zx$ の標準形 $F'(u,v,w)$ を求めよ.