

数学 6 (M・I 科) 学年末試験 (担当: 藤井 忍) (1 枚目)

2011 年 2 月 17 日実施

科 番号

氏名

以下の全ての問題に計算過程も書いて答えること。

問題 1. 以下の文章のうち、正しいものを全て選び、その番号を解答欄に書け。ただし、全て正しい場合は全てと書き、全て正しくない場合はなしと書くこと。余計なものを書いた場合は減点するので注意すること。

- (1) 空間の線型変換の表現行列は、2 次正方行列である。
- (2) どんなベクトルも $\mathbf{0}$ に移す変換は、線型変換である。
- (3) 線型変換が逆変換をもつための必要十分条件は、その表現行列が正則行列であることである。
- (4) 行列 A が直交行列であるとは、 A の転置行列 A^t が A に等しいことである。
- (5) 行列 A の固有方程式が重解をもつ時、 A は絶対に対角化できない。
- (6) 対称行列は必ず対角化できる。
- (7) 対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは必ず直交する。
- (8) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してケーリー・ハミルトンの定理を使うと $A^2 + (a+d)A - (ad-bc)E = \mathbf{0}$ が成り立つ。

答. _____

問題 2. 2 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

について、以下の問題に答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有ベクトルを求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ。ただし、行列の極限は各成分の極限を成分に持つ行列とする。

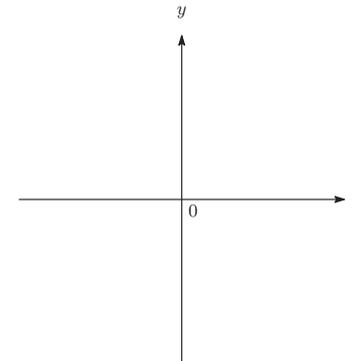
問題 3. 平面上の二次形式

$$f(x, y) = 3x^2 - 8xy + 3y^2$$

について、以下の問題に答えよ。

(1) $f(x, y)$ の標準形 $F(u, v)$ を求めよ。

(2) $3x^2 - 8xy + 3y^2 = -7$ の概図を描け。



問題 4. 以下の問題に答えよ。

(1) 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

について、 $P = 2A^3 + A^2 - 7A + 13E$ を求めよ。

(2) 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

が $A^2 - 4A + 3E = \mathbf{0}$ を満たすような実数 x, y を全て求めよ。

以下の全ての問題に計算過程も書いて答えること。

問題 5. G を以下の不等式で定義される空間図形とする:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

このとき、以下の問題に答えよ。

(1) G はどのような図形か。

(2) 空間上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 3y \\ z \\ 2x \end{pmatrix}$$

による G の像を求めよ。

問題 6. 空間上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2y - z \\ 2x - 3y + 2z \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

について、以下の問題に答えよ。

(1) f の表現行列 A を求めよ。

(2) A の固有値を求めよ。

(3) A の固有ベクトルを求めよ。

(5) $T^{-1}AT$ が対角行列になるような直交行列 T を求めよ。また対角行列 $T^{-1}AT$ を求めよ。

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ。また対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。