数学 6 (担当: 藤井 忍)　補充問題解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2×3　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $(2,2)$–成分

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 1×6　(2) 2　(3) $(1,5)$–成分

$\boxed{\mathbf{3}}$ a, b, c, d に関する連立方程式

$$\begin{cases} a+b=-5, \\ 2a-b=-1, \\ 2c-d=2, \\ c+d=1 \end{cases}$$

を解いて, $a=-2$, $b=-3$, $c=1$, $d=0$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ a, b, c, d, e, f に関する連立方程式

$$\begin{cases} a+b=1, & (1) \\ a-c=-2, & (2) \\ 2b=d, & (3) \\ b=c+1, & (4) \\ e-1=c-b, & (5) \\ -a+3f=-2d & (6) \end{cases}$$

(4) を (1), (3), (5) に代入して

$$\begin{cases} a+c=0, & (7) \\ 2c+2=d, & (8) \\ e-1=-1 & (9) \end{cases}$$

(9) より $e=0$.
(2) と (7) から $a=-1$, $c=1$.
(1) に $a=-1$ を代入して $b=2$.
(3) に $b=2$ を代入して $d=4$.
(6) に $a=-1$, $d=4$ を代入して

$$\begin{aligned} 1+3f&=-8 \\ 3f&=-9 \\ f&=-3 \end{aligned}$$

以上より $a=-1$, $b=2$, $c=1$, $d=4$, $e=0$, $f=-3$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\begin{pmatrix} 11 & 0 & 21 \\ 11 & 10 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $4A-3B=\begin{pmatrix} 15 & -16 & 1 \\ -1 & 18 & 9 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\begin{pmatrix} -14 & -20 & -4 \\ -10 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 8 & -10 & 14 \\ 18 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ 予式を整理して

$$\begin{aligned} 2A-B+X&=3(X+B) \\ 2A-B+X&=3X+3B \\ X-3X&=3B-2A+B \\ -2X&=-2A+4B \\ X&=A-2B \end{aligned}$$

よって $X=A-2B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ 与えられた連立方程式に以下のように番号を付ける.

$$\begin{cases} 2X+Y=A & (1) \\ -X+3Y=B & (2) \end{cases}$$

$(1)\times 3-(2)$ より

$$7X=3A-B=\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$$

したがって $X=\dfrac{1}{7}(3A-B)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

また, (1) より

$$\begin{aligned} 2X+Y&=A \\ Y&=A-2X \\ &=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より, $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ 答えだけ.

(1) $\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}$　(2) 11　(3) $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 22 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{10}}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ より $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & bc \\ ac & bc \end{pmatrix}$.

したがって $A^2 = O$ であるためには,

$$\begin{cases} a^2+bc=0, & (1) \\ ab=0, & (2) \\ ac=0, & (3) \\ bc=0 & (4) \end{cases}$$

であればよい.

(4) を (1) に代入して $a^2=0$. よって $a=0$. このとき, (2), (3) は自動的に成り立つ. 以上より, 求める条件は $a=0$ かつ $bc=0$.

($a=0$ かつ “$b=0$ または $c=0$” でも可)

$\boxed{\textbf{11}}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= A^2-(a+d)A+(ad-bc)E \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\qquad + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\text{右辺})\end{aligned}$$

これで証明が終わる.

$\boxed{\textbf{12}}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ について

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+ab & a+ac \\ b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix}$$

なので, $A^2=3A$ に代入して

$$\begin{pmatrix} 1+ab & a+ac \\ b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{cases} 1+ab=3, & (1) \\ a+ac=3a, & (2) \\ b+bc=3b, & (3) \\ ab+c^2=3c & (4) \end{cases}$$

を得る.

(1) から $ab=2$.

これを (4) に代入して $c^2+2=3c$. 整理して $c^2-3c+2=0$. これを解いて $c=1, 2$.

$c=1$ とすると, (2), (3) から $2a=3a$, $2b=3b$ を得, これより $a=b=0$. これは a, b, c が正の整数であることに反する. ゆえに $c \fallingdotseq 1$.

$c=2$ とすると (2), (3) から $3a=3a$, $3b=3b$ を得, これらはいつでも正しい. (1) より $ab=2$. さらに a, b, c が正の整数であることから, $a=1$, $b=2$ または $a=2$, $b=1$ しかあり得ない.

以上より, $(a,b,c)=(1,2,2), (2,1,2)$.

(2) $A^2=3A$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A = 3AA = 3A^2 = 3\cdot 3A = 9A \\ A^4 &= A^3A = 9AA = 9A^2 = 9\cdot 3A = 27A \\ A^5 &= A^4A = 27AA = 27A^2 = 27\cdot 3A = 81A \end{aligned}$$

と計算される. この結果より $A^n = 3^{n-1}A$ と推測される. このことを数学的帰納法を用いて証明する.

$n=1$ のとき, $A^1=A$ であり, 一方, 右辺は $3^{1-1}A = 3^0A = A$ なので成り立つ.

$n>1$ のとき $A^n=3^{n-1}A$ が成り立っていると仮定すると,

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^nA &= 3^{n-1}AA \\ &= 3^{n-1}A^2 = 3^{n-1}\cdot 3A = 3^nA \end{aligned}$$

となり, $A^{n+1}=3^nA$ が成り立つことが分かる.

以上により, 全ての正の整数 n について $A^n=3^{n-1}A$ であることが証明された.

$\boxed{\textbf{13}}$ (1) $|A| = 5\cdot 3-4\cdot 3 = 15-12 = 3 \fallingdotseq 0$ なので, A^{-1} は存在する, つまり A は正則である. また, $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $|B| = 6\cdot(-2)-4\cdot(-3) = -12+12 = 0$ なので, B^{-1} は存在しない, つまり B は正則ではない.

(3) $|C| = 1\cdot 2-2\cdot 1 = 2-2 = 0$ なので, C^{-1} は存在しない, つまり C は正則ではない.

(4) $|D| = (-1)\cdot 0-4\cdot 1 = 0-4 = -4 \fallingdotseq 0$ なので, D^{-1} は存在する, つまり D は正則である. また, $D^{-1} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{14}}$ A が正則, つまり A の逆行列が存在するのは $|A| \fallingdotseq 0$ のとき. $|A| = 5a-20$ だから $|A| \fallingdotseq 0$ であるのは $a \fallingdotseq 4$ のとき. したがって, A が正則であるための条件は $a \fallingdotseq 4$. このとき, A の逆行列 A^{-1} は $A^{-1} = \dfrac{1}{5a-20}\begin{pmatrix} a & -2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$

15 $AX = X + A$ を整理して

$$\begin{aligned} AX &= X + A \\ AX - X &= A \\ (A-E)X &= A \end{aligned}$$

ここで, $A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について $|A-E| = 1 \fallingdotseq 0$ だから $(A-E)^{-1}$ は存在して, $(A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(A-E)^{-1}$ を $(A-E)X = A$ の両辺に左からかけて

$$\begin{aligned} (A-E)^{-1}(A-E)X &= (A-E)^{-1}A \\ X &= (A-E)^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

16 (1) A が正則であると仮定して矛盾を導く. A が正則であると仮定すると A の逆行列 A^{-1} が存在する. A^{-1} を $A^2 = O$ の両辺に左からかけて (右からかけてもよい)

$$\begin{aligned} A^{-1}A^2 &= A^{-1}O \\ A &= O \end{aligned}$$

したがって $A = O$ が分かるが, 零行列 O は正則ではない (逆行列は存在しない) ので, A も正則ではない. これは A が正則であるという仮定に矛盾する. したがって A は正則ではない.

(2) $A - E$ の左から $-A - E$ をかけると, $A^2 = O$ だから

$$(-A-E)(A-E)X = -A^2 + A - A + E = E$$

一方, $A - E$ の右から $-A - E$ をかけると, $A^2 = O$ だから

$$(A-E)(-A-E)X = -A^2 - A + A + E = E$$

ゆえに, $-A-E$ は $A-E$ の逆行列. したがって, $A-E$ は正則である.

17 答えだけ.

(1) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -6 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -8 \\ -3 & -1 & 9 \\ 10 & -12 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}$

18 答えだけ.

(1) $S = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

19 (1) ${}^tA = A$, つまり

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が成り立てばよいので, 両辺を比較して $b = c$.

(2) ${}^tA = -A$, つまり

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

が成り立てばよいので, 両辺を比較して $a = d = 0$ かつ $c = -b$.

20 A は正則なので, 逆行列 A^{-1} が存在する. 逆行列の定義から $AA^{-1} = E$ かつ $A^{-1}A = E$ が成り立つ. $AA^{-1} = E$ の両辺の転置行列を考えても等号は成立するので ${}^t\left(AA^{-1}\right) = {}^tE$. 転置行列の性質より左辺は ${}^t\left(AA^{-1}\right) = {}^t\left(A^{-1}\right){}^tA$ であり, E は対称行列なので ${}^tE = E$. したがって ${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = E$ を得る. 同様の議論を $A^{-1}A = E$ に対して行うことで, ${}^tA\,{}^t\left(A^{-1}\right) = E$ を得る.

以上より ${}^tA$ は正則であり, その逆行列は ${}^t\left(A^{-1}\right)$ であることが分かる. 逆行列は存在すれば一つしか存在しないので, $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$ も分かる.

21 (1) ${}^t(A^2) = A^2$ が成り立つことを確認すればよい.

$$(\text{左辺}) = {}^t(A^2) = {}^t(AA) = {}^tA\,{}^tA$$

であって, A は交代行列なので ${}^tA = -A$ が成り立つので, 上の等式の最後の項は

$${}^tA\,{}^tA = (-A)(-A) = A^2$$

と変形できる. よって ${}^t(A^2) = A^2$ が成り立つことが分かった.

(2) ${}^t(AB - BA) = -(AB - BA)$ が成り立つことを確認すればよい.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= {}^t(AB - BA) \\ &= {}^t(AB) - {}^t(BA) \\ &= {}^tB\,{}^tA - {}^tA\,{}^tB \end{aligned}$$

であって, A, B は交代行列なので ${}^tA=-A$, ${}^tB=-B$ が成り立つので, 上の等式の最後の項は

$$\begin{aligned}{}^tB\,{}^tA-{}^tA\,{}^tB&=(-B)(-A)-(-A)(-B)\\&=BA-AB\\&=-(AB-BA)\end{aligned}$$

と変形できる. よって ${}^t(AB-BA)=-(AB-BA)$ が成り立つことが分かった.

(3) ${}^t(AB-BA)=-(AB-BA)$ が成り立つことを確認すればよい.

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&={}^t(AB-BA)\\&={}^t(AB)-{}^t(BA)\\&={}^tB\,{}^tA-{}^tA\,{}^tB\end{aligned}$$

であって, A, B は対称行列なので ${}^tA=A$, ${}^tB=B$ が成り立つので, 上の等式の最後の項は

$${}^tB\,{}^tA-{}^tA\,{}^tB=BA-AB=-(AB-BA)$$

と変形できる. よって ${}^t(AB-BA)=-(AB-BA)$ が成り立つことが分かった.

22 答えだけ.

(1) $\operatorname{rank}A=2,\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

(2) $\operatorname{rank}B=2,\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

(3) $\operatorname{rank}C=1,\quad C^{-1}$ は存在しない

(4) $\operatorname{rank}D=1,\quad D^{-1}$ は存在しない

(5) $\operatorname{rank}P=3,\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&3\\-2&-5&-2\end{pmatrix}$

(6) $\operatorname{rank}Q=3,\quad Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&1&-1\\-5&5&2\end{pmatrix}$

(7) $\operatorname{rank}R=3,\quad R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}$

23 行基本変形で A^{-1} を計算すると

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7&4&2\\3&2&1\\10&5&3\end{pmatrix}$$

(1) $AX=B$ の両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\begin{aligned}A^{-1}AX&=A^{-1}B\\X&=A^{-1}B\\&=\begin{pmatrix}7&4&2\\3&2&1\\10&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}31&-3\\14&-1\\43&-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) $YA=B$ の両辺に右から A^{-1} をかけて

$$\begin{aligned}YAA^{-1}&={}^tBA^{-1}\\Y&={}^tBA^{-1}\\&={}^t\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&4&2\\3&2&1\\10&5&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}37&21&11\\-4&-2&-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

24 $B^{-1}A^{-1}$ について以下の等式が成り立つことを確かめればよい:

$$(B^{-1}A^{-1})AB=E \tag{1}$$
$$AB(B^{-1}A^{-1})=E \tag{2}$$

まず (1) を確かめる.

$$\begin{aligned}(\text{左辺})=(B^{-1}A^{-1})AB&=B^{-1}A^{-1}AB\\&=B^{-1}EB\\&=B^{-1}B\\&=E\\&=(\text{右辺})\end{aligned}$$

であることから, (1) は成り立つ. 同様の計算により (2) も成り立つことが分かる. 逆行列は存在すれば, 一つだけしか存在しないので, $B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$ である.

25 答えだけ.

(1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-1&0\\-4&3&1&-1\\-3&1&1&0\\3&-2&-1&1\end{pmatrix}$

(2) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&0\\-1&1&0&0\\9&-8&1&2\\-2&2&0&-1\end{pmatrix}$

(3) $C^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}9&1&-6&1\\-6&1&3&-2\\-9&0&6&-3\\-3&0&3&0\end{pmatrix}$

26 答えだけ.

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$

(3) 解なし

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} \\ 57 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$

(7) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$

(8) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k, \ell \in \mathbb{R})$

(9) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(10) 解なし

(11) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{19} \\ \frac{2}{19} \\ -\frac{5}{19} \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$

27 (1) 係数行列の階数: 2 拡大係数行列の階数: 2

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k, \ell \in \mathbb{R})$

28 $k = 3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

29 (1) 偶置換, 符号: $+1$

(2) 奇置換, 符号: -1

(3) 奇置換, 符号: -1

(4) 奇置換, 符号: -1

(5) 奇置換, 符号: -1

(6) 偶置換, 符号: $+1$

30 答えだけ.

(1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) -4

(5) 0 (6) -61 (7) 1 (8) -168

31 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$ で, 面積は正だから, 求める面積は 7.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ より, 求める三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ の絶対値に等しい. $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -11$ より, 求める面積は $\dfrac{11}{2}$.

32 (1) 求める平行六面体の体積は $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ の絶対値に等しい. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$ より, 求める体積は 5.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, 求める四面体の体積は $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ の絶対値に等しい. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8$ より, 求める体積は $\dfrac{8}{2} = 4$.

33 答えだけ.

(1) $2(x+y)(x-y)$

(2) $-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

(3) $2(x+y+z)^3$

34 答えだけ.

(1) $x = \pm 2$ (2) $x = 0, \pm 1$

35 行列式の性質より $\left|A^5\right| = |A|^5$ であり, $|A| = -1$ なので, $\left|A^5\right| = (-1)^5 = -1$.

36 (1) $AB = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ なので $|AB| = -20$

(2) $|A| = -5, |B| = 4$ なので $|A|\,|B| = -20$

37 答えだけ.

(1) -22　(2) $\left|{}^tA\right| = -22$

38 A は正則なので逆行列 A^{-1} が存在する．逆行列の定義より $AA^{-1} = E$ が成り立つ．ここで両辺の行列式を考えると，$\left|AA^{-1}\right| = |E|$ が成り立つ．行列式の性質より左辺は $\left|AA^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right|$．一方，右辺は $|E| = 1$ なので，$|A|\left|A^{-1}\right| = 1$ を得る．したがって $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$ である．

39 答えだけ．
(1) 41　(2) 89　(3) -160

40 答えだけ．
(1) $(x+3y)(x-y)^3$
(2) $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$
(3) $(ad-bc)^2$

41 (1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2x \\ -2y \end{pmatrix}$　(2) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} e^y \\ e^z \\ e^x \end{pmatrix}$

(3) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} e^x - xe^z \\ e^y - ye^x \\ e^z - ze^y \end{pmatrix}$

42 答えだけ．
(1) $x = \dfrac{7}{2}$, $y = -2$
(2) $x = 10$, $y = -2$
(3) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

43 $\begin{vmatrix} k-1 & 3 \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$ を解いて $k = 3,\ -2$.

$k = 3$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$　$(\ell \in \mathbb{R})$

$k = -2$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(\ell \in \mathbb{R})$

44 $\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k-3 & 2 \\ -1 & 2 & k \end{vmatrix} = 0$ を解いて $k = 5,\ -1$ (重解).

$k = 5$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$(\ell \in \mathbb{R})$

$k = -1$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　$(\ell, m \in \mathbb{R})$

45 答えだけ．
(1) 線型独立
(2) 線型従属
(3) 線型独立

46 答えだけ．
(1) 線型独立
(2) 線型独立
(3) 線型独立
(4) 線型従属

47 答えだけ．
(1) $-3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$
(2) $\dfrac{11}{3}\boldsymbol{f}_1 - \dfrac{10}{3}\boldsymbol{f}_2$
(3) $\dfrac{-x+2y}{3}\boldsymbol{f}_1 + \dfrac{2x-y}{3}\boldsymbol{f}_2$

48 (1) 線型変換 $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$
(2) 線型変換ではない　定数項が 0 ではないから
(3) 線型変換ではない　2 次の項があるから
(4) 線型変換 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

49 答えだけ．
(1) $(0, 0)$
(2) $(10, 0)$
(3) $(4\sqrt{2} + 12, 2\sqrt{2} - 4)$
(4) $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

50 答えだけ．
$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

51 $(\mp 3, \pm 2)$ (複号同順)

52 答えだけ．
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(ヒント: 点 $\mathrm{P}(x, y)$ の像を点 $\mathrm{P}'(x', y')$ とするとき
(1) P と P$'$ の中点は直線 $y = \sqrt{2}x$ 上にある
(2) P と P$'$ を通る直線と直線 $y = \sqrt{2}x$ は垂直に交わる
ことの条件をそれぞれ式で表わして，x', y' に関する連立方程式を解け)

53 直線 $y = \dfrac{1}{2}x$

$\boxed{\mathbf{54}}$ 答えだけ.

(1) 直線 $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$

(2) 直線 $y = x + 2$

$\boxed{\mathbf{55}}$ 答えだけ.

(1) 点 $(1, 3)$

(2) 直線 $y = 3x$

$\boxed{\mathbf{56}}$ 以下の通り:

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= f(a\boldsymbol{p} + b\boldsymbol{q}) = f(a\boldsymbol{p}) + f(b\boldsymbol{q}) \\ &= a\,f(\boldsymbol{p}) + b\,f(\boldsymbol{q}) = (\text{右辺})\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{57}}$ 点 (x, y) の f による像が (x, y) だから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 6y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

が成り立っている. したがって

$$\begin{cases} x = 4x + 6y \\ y = x + 3y \end{cases}$$

を満たす x, y の組を求めればよい. 上の連立方程式は

$$\begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

と書き直せる. 消去法によって

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから $x + 2y = 0$ を満たす x, y が求める解. よって求める図形は直線 $x + 2y = 0$.

$\boxed{\mathbf{58}}$ f の表現行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく.

${}^t(1\ \ 1)$ が ${}^t(1\ \ 1)$ に移るので

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ c + d = 1 \end{cases}$$

x 軸上の点は $(s, 0)$ と表わせて, ${}^t(s\ \ 0)$ は f によって元のベクトルに平行なベクトルに移るので

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

f の線型性から

$$s\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = sk\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので $s \fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} a = k \\ c = 0 \end{cases}$$

(原点の像は原点だから $s = 0$ のときは考えなくても良い)

直線 $y = 2x$ 上の点は $(r, 2r)$ と表わせて, f によるその像は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + 2b)r \\ (c + 2d)r \end{pmatrix}$$

${}^t((a + 2b)r\ \ (c + 2d)r)$ が $y = 2x$ に垂直なので, 内積 ${}^t((a + 2b)r\ \ (c + 2d)r) \cdot {}^t(1\ \ 2) = 0$ つまり

$$(a + 2b)r + 2(c + 2d)r = 0$$

$r = 0$ のときは上の等式は成り立つので, $r \fallingdotseq 0$ の時のみ考えればよく,

$$a + 2b + 2(c + 2d) = 0$$

これらより $a = 6$, $b = -5$, $c = 1$, $d = 0$, $k = 6$ を得るので, 求める行列は $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{59}}$ $g \circ f$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$f \circ g$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{60}}$ 答えだけ.

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{f^{-1}} \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}y \\ x \end{pmatrix}$

(2) $(2, -1)$

$\boxed{\mathbf{61}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{62}}$ 答えだけ.

(1) $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ (これは 2θ 回転の表現行列)

$\boxed{\mathbf{63}}$ (1) 固有値 $1, 5$

固有値 1 に対応する固有ベクトル $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$

固有値 5 に対応する固有ベクトル $\ell\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(\ell \fallingdotseq 0)$

対角化可能で, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) 固有値 2, 3

固有値 2 に対応する固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$

固有値 3 に対応する固有ベクトル $\ell\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $(\ell \fallingdotseq 0)$

対角化可能で, $P = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 2\\-3 & 5\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$

(3) 固有値 3 (重解)

固有値 3 に対応する固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$

対角化不可能

(4) 固有値 -4, 2

固有値 -4 に対応する固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$

固有値 2 に対応する固有ベクトル $\ell\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(\ell \fallingdotseq 0)$

対角化可能で, $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 1\end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\5 & -3\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}-4 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

(5) 固有値 2 (重解)

固有値 2 に対応する固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$

対角化不可能

64

(1) $A = \begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}$ とする. A の固有方程式は $|A-\lambda E| = 0$ だから, この左辺を展開すれば十分である.

$$\begin{aligned}|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix}a-\lambda & b\\c & d-\lambda\end{vmatrix}\\&= (a-\lambda)(d-\lambda)-bc\\&= \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)\end{aligned}$$

である. $\mathrm{Tr}(A) = a+d$, $|A| = ad-bc$ だから, これを上の式に代入することで証明が終わる.

(2) $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}$ とする. 左辺については, $A+B = \begin{pmatrix}a+p & b+q\\c+r & d+s\end{pmatrix}$ だから

$$\mathrm{Tr}(A+B) = a+p+d+s$$

一方, 右辺は $\mathrm{Tr}(A) = a+d$, $\mathrm{Tr}(B) = p+s$ だから

$$\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B) = a+d+p+s$$

よって $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$ が成り立つ.

(3) $A = \begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}$ とする. 左辺については, $cA = \begin{pmatrix}cp & cq\\cr & cs\end{pmatrix}$ だから

$$\mathrm{Tr}(cA) = cp+cs$$

一方, 右辺は $\mathrm{Tr}(A) = p+s$ だから

$$c\,\mathrm{Tr}(A) = c(p+s) = cp+cs$$

よって $\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A)$ が成り立つ.

(4) $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}$ とする. 左辺については, $AB = \begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}$ だから

$$\mathrm{Tr}(AB) = ap+br+cq+ds$$

一方, 右辺は $BA = \begin{pmatrix}ap+cq & bp+dq\\ar+cs & br+ds\end{pmatrix}$ だから

$$\mathrm{Tr}(BA) = ap+cq+br+ds$$

よって $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ が成り立つ.

(5) AP, P^{-1} ともに 2 次正方行列だから (4) が使えて,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)\\&= \mathrm{Tr}(P^{-1}(AP))\\&= \mathrm{Tr}((AP)P^{-1})\\&= \mathrm{Tr}(A(PP^{-1}))\\&= \mathrm{Tr}(AE)\\&= \mathrm{Tr}(A) = (\text{右辺})\end{aligned}$$

である. よって $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$ が成り立つ.

(6) 固有値は固有方程式の解だから $\lambda = \alpha$, β は $|A-\lambda E| = 0$ の解である. (1) より, A の固有方程式は $\lambda^2-\mathrm{Tr}(A)\lambda+|A| = 0$ である. したがって, 二次方程式の解と係数の関係から

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \mathrm{Tr}(A)\\\alpha\beta &= |A|\end{aligned}$$

が成り立つ.

65 答えだけ.

(1) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値は 2 と 4.

$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tTAT=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値は 4 と 9. $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tTAT=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値は ±1. $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tTAT=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

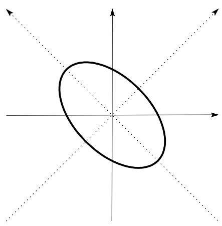
(4) $A=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値は -7 と 6. $T=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tTAT=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値は ±5. $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tTAT=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$

66 対応する対称行列は $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値は 3 と 1. $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと,

${}^tTAT=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

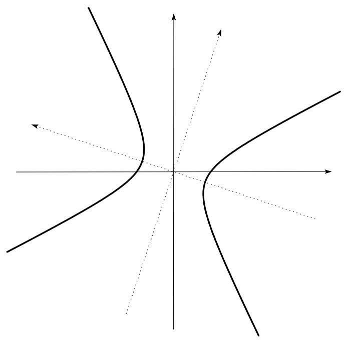
よって, 標準形 $F(u,v)=3u^2+v^2$



67 対応する対称行列は $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値は ±5. $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$ とおくと,

${}^tTAT=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

よって, 標準形 $F(u,v)=-5u^2+5v^2$



68 平面上の原点を回転の中心とする, θ 回転の表わす線型変換の表現行列を $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とするとき, ${}^tAA=E$ が成り立つことを証明すれば良い.

$$\begin{aligned}{}^tAA&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E\end{aligned}$$

したがって A は直交行列である．ゆえに平面上の原点を回転の中心とする, θ 回転は直交変換である.

69 $\boldsymbol{a}$ をかってな平面ベクトルとすると,

$$\begin{aligned}|g\circ f(\boldsymbol{a})|&=|g(f(\boldsymbol{a}))|\\ &=|f(\boldsymbol{a})|\quad(g\ \text{は直交変換})\\ &=|\boldsymbol{a}|\quad(f\ \text{は直交変換})\end{aligned}$$

よって $g\circ f$ は全ての平面ベクトルの長さを変えないので直交変換である.

70 A を直交行列とすると ${}^tAA=E$ が成り立つ．両辺の行列式を考えると $\left|{}^tAA\right|=|E|$ が成り立つ．ここで左辺は

$$(\text{左辺})=\left|{}^tAA\right|=\left|{}^tA\right||A|=|A||A|=|A|^2$$

一方, 右辺は $|E|=1$ だから $|A|^2=1$. したがって $|A|=\pm1$ が成り立つことが証明された.

71 $\boldsymbol{p}$ をかってな平面ベクトルとするとき,

$$\left|f^{-1}(\boldsymbol{p})\right| = |\boldsymbol{p}|$$

が成り立つことを証明すれば良い. $\boldsymbol{q} = f^{-1}(\boldsymbol{p})$ とおいて $|\boldsymbol{q}|$ を計算してみる. f が直交変換であることから

$$|f(\boldsymbol{q})| = |\boldsymbol{q}|$$

が成り立つ. ここで $\boldsymbol{q} = f^{-1}(\boldsymbol{p})$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= |f(\boldsymbol{q})| = \left|f(f^{-1}(\boldsymbol{p}))\right| = \left|f \circ f^{-1}(\boldsymbol{p})\right| = |\boldsymbol{p}| \\ (\text{右辺}) &= |\boldsymbol{q}| = \left|f^{-1}(\boldsymbol{p})\right|\end{aligned}$$

なので $\left|f^{-1}(\boldsymbol{p})\right| = |\boldsymbol{p}|$ を得る.

72 (1) $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$, $f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}'$ が成り立っていて, f は線型変換なので $f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'$ が成り立つ. したがって $|f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})| = |\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'|$ が成り立つが, f は直交変換なので $|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'|$ が成り立つ. 両辺を 2 乗しても等号は成り立つので $|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}|^2 = |\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'|^2$ が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= |\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}|^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|^2 \\ (\text{右辺}) &= \left|\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'\right|^2 = \left|\boldsymbol{p}'\right|^2 + 2\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}' + \left|\boldsymbol{q}'\right|^2\end{aligned}$$

だから

$$|\boldsymbol{p}|^2 + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|^2 = \left|\boldsymbol{p}'\right|^2 + 2\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}' + \left|\boldsymbol{q}'\right|^2$$

ここで, $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$, $f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}'$ が成り立っていて, f は直交変換だったから $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}|'$, $|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{q}|'$ が成り立つ. これによって

$$2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}'$$

したがって $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}'$ が成り立つ.

(2) $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ のなす角を θ, $\boldsymbol{p}'$ と $\boldsymbol{q}'$ のなす角を ϕ とする. ただし $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \phi \leqq \pi$ とする. (1) より $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}'$ であり,

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = |\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{q}|\cos\theta, \qquad \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}' = \left|\boldsymbol{p}'\right|\left|\boldsymbol{q}'\right|\cos\phi$$

なので $\cos\theta = \cos\phi$ を得る. θ, ϕ ともに 0 以上 π 以下なので $\theta = \phi$ である.

73 行列を A, 正方行列を P とする.

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(2) 対角化できない

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 対角化できない

(5) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(6) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

74 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2, λ_3 とするとき,

$$|A - \lambda E| = (-1)^3(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \qquad (\star)$$

とおく.

(1) $(\star)$ の左辺に $\lambda = 0$ を代入すると (左辺) $= |A|$. そのときの右辺を計算すると

$$(-1)^3(0-\lambda_1)(0-\lambda_2)(0-\lambda_3) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

これで証明が終わる.

(2) A が正則であることと $|A| \fallingdotseq 0$ は同値. (1) より $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ なので $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \fallingdotseq 0$. よって λ_1, λ_2, λ_3 いずれも 0 ではない.

75 行列を A, 直交行列を T とする.

(1) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

(2) $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(5) 配布プリントの問題が間違ってました．正しくは，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ です．これの答えが↓．

$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(6) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

76

(1) $F'(u,v,w) = 2u^2 + 2v^2 + 3w^2$

(2) $F'(u,v,w) = -2u^2 - 2v^2 + 3w^2$

77

(1) $-(\lambda-2)^3 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$

(2) $A - 2E = O$

78 $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

79 $(x,y) = (3, \pm 1)$

80

(1) 固有値 1 に対応する固有ベクトル $k\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$

固有値 $\frac{1}{3}$ に対応する固有ベクトル $\ell\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\ell \fallingdotseq 0)$

(2) $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(3) $A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2+6\left(\frac{1}{3}\right)^n & 4-4\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 3-3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 6+2\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$

(4) $\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$