平面ベクトルの復習

数学 6: 学習到達度試験対策 (担当: 藤井 忍)

1 ベクトルの演算

ベクトル $\overrightarrow{a} = (x_1,\ y_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2,\ y_2)$ と実数 k について

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$

(3) $k\overrightarrow{a} = (kx_1, ky_1)$

(4) $-\overrightarrow{a} = (-x_1, -y_1)$

問題 1 $\overrightarrow{a} = (1, -2)$, $\overrightarrow{b} = (-3, 2)$ について, 次のベクトルを成分で表わせ.

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

(2) $-2\overrightarrow{a}$

(3) $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$

2 ベクトルの成分

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

問題 2 平面上の 3 点 A$(4, 0)$, B$(3, 5)$, C$(-2, -5)$ について, 次のベクトルを成分で表わせ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

3 ベクトルの長さ

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x,\ y)$ の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

問題 3 A$(2,\ -1)$, B$(3,\ 1)$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さを求めよ.

4 内分点と外分点の位置ベクトル

3 点 O, A, B について, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表わすことにする.

(1) 点 C が 線分 AB を $m : n$ の比に**内分**する位置にあるとき, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{n\,\overrightarrow{a} + m\,\overrightarrow{b}}{m+n}$

(2) 点 D が 線分 AB を $m : n$ の比に**外分**する位置にあるとき, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{-n\,\overrightarrow{a} + m\,\overrightarrow{b}}{m-n}$

問題 4　平面上の 3 点 O$(0,\ 0)$, A$(-3,\ 2)$, B$(4,\ -8)$ について以下の問題に答えよ.

(1) 線分 AB を $2 : 3$ に内分する点 C の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2) 線分 AB を $2 : 3$ に外分する点 D の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

5 ベクトルの内積

ともに $\overrightarrow{0}$ ではない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の**内積**とは, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の始点をそろえたとき, それぞれの終点の位置関係を大雑把に表す数値.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の成分が分かっているとき
$\overrightarrow{a} = (x_1,\ y_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2,\ y_2)$ のとき, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

(2) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の長さと, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ が分かっているとき
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\cos\theta$

問題 5　ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ について, $|\overrightarrow{a}| = 4$, $|\overrightarrow{b}| = 2$ で, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角が $\dfrac{2}{3}\pi$ のとき, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を求めよ.

問題 6　ベクトル $\overrightarrow{a} = (4,\ 2)$, $\overrightarrow{b} = (3,\ -1)$ のなす角を求めよ.

6 ベクトルの位置関係

ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ はともに $\overrightarrow{0}$ ではないとする.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が**平行** $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$ をみたす実数 k $(\fallingdotseq 0)$ が存在する

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が**垂直** $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$

$\boxed{\textbf{問題 7}}$ ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,\ 2)$, $\overrightarrow{b}=(x-2,\ x)$ が平行になるように, x の値を定めよ.

$\boxed{\textbf{問題 8}}$ ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,\ 2)$, $\overrightarrow{b}=(x-2,\ x)$ が垂直になるような x の値を定めよ.

7 ベクトルと直線の位置関係

直線 ℓ の**方向ベクトル** $=\ell$ に平行なベクトル $=$ $\boldsymbol{\ell}$ **の傾き**を表すベクトル.

直線 ℓ の**法線ベクトル** $=\ell$ に垂直なベクトル $=$ $\boldsymbol{\ell}$ **に垂直な直線の傾き**を表すベクトル.

直線 $\ell: ax+by+c=0$ (ただし a, b の少なくとも一方は 0 ではない) の方向ベクトル $\overrightarrow{d}$ と法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ はそれぞれ

$$\overrightarrow{d}=k(b,\ -a) \qquad (\text{ただし } k \text{ は 0 ではない実数})$$
$$\overrightarrow{n}=k'(a,\ b) \qquad (\text{ただし } k' \text{ は 0 ではない実数})$$

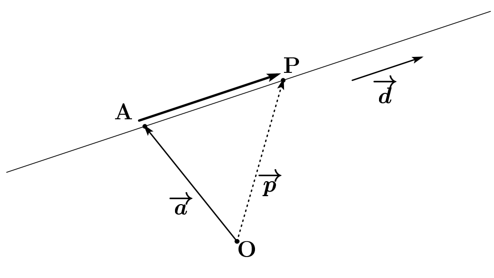
方向ベクトルと法線ベクトルは**無数にたくさん存在する**事に注意.

$\boxed{\textbf{問題 9}}$ 直線 $3x+4y-5=0$ に平行なベクトルと垂直なベクトルをそれぞれ**一つずつ**求めよ.

8 直線のベクトル方程式

8–A 方向ベクトルが分かっている場合

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ を通り, $\overrightarrow{d}=(a,\ b)$ を方向ベクトルとする直線 ℓ のベクトル方程式は $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+t\,\overrightarrow{d}$



$\overrightarrow{p}=(x,\ y)$ とおいて, 上の方程式を媒介変数表示すると $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$

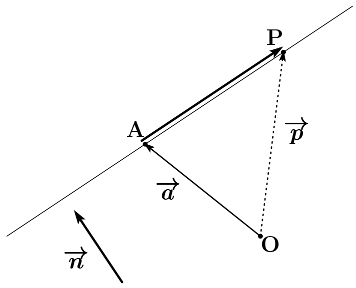
上の媒介変数表示から媒介変数 t を消去して直線の方程式を作ると $bx-ay=bx_0-ay_0$

8–B　法線ベクトルが分かっている場合

点 A$(x_0,\ y_0)$ を通り, $\overrightarrow{n} = (a,\ b)$ を法線ベクトルとする直線 ℓ のベクトル方程式は $\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) = 0$

$\overrightarrow{p} = (x,\ y)$ とおいて, $(a,\ b) \cdot (x - x_0,\ y - y_0) = 0$

上の方程式を展開・整理して直線の方程式を作ると $ax + by = ax_0 + by_0$



問題 10

(1) 点 A(2, 3) を通り, $\overrightarrow{d} = (1,\ 4)$ が方向ベクトルである直線の方程式を求めよ.

(2) 点 A(1, 2) を通り, $\overrightarrow{n} = (4,\ 3)$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ.