科　　番　氏名：

数学 6 冬休み課題プリント B (出題: 2011/12/15, 提出: 2012/01/12)

平面上の線型変換について, 固有値が一つしかなく, かつ固有ベクトルが一方向分しかない場合は対角化できなかった. しかし, 固有ベクトルに替わるベクトルを上手く選ぶことで, 対角化に似た変形を施すことができる. その変形の仕方を具体的な例で確かめてみよう.

以下の全ての問題に計算過程も書いて答えること.

平面上の線型変換 f を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 4x-y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, 以下の問題に答えよ.

(1) f の表現行列 A を求めよ.

(2) A の固有方程式を答えよ.

(3) A の固有値 λ を求めよ

(4) A の固有ベクトルを求めよ.

この問題の線型変換 f の固有値は一つだけで, その値は 3 である. 固有値 3 に対する固有ベクトルは一方向のみで, $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R},\ k \fallingdotseq 0)$ である. したがって f の表現行列 A は対角化できない. そこで, 2 つ目の固有ベクトルの代わりのベクトルを次のように計算する.
その前に準備をひとつだけ:

- A の固有ベクトルを一つ固定: (4) で求めた固有ベクトルのうち $k=1$ のものを $\boldsymbol{v}$ と表わしておく.

$$\boldsymbol{v} = \boxed{}$$

(5) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とするとき, 連立一次方程式

$$(A-\lambda E)\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}$$

を解け. ただし, λ は (3) で求めた A の固有値で, $\boldsymbol{v}$ は さっき決めた A の固有ベクトルである.

(6) 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}$ は線型独立であることを証明せよ.

(7) 2 次正方行列 P を $P = (\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{p})$ と定義するとき, $P^{-1}AP$ を計算せよ. ここで, $(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ のとき $(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ と表される行列である.

正しく計算されていれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となるはずである. この行列は対角成分は固有値 3 だが, 残念ながら対角行列ではない (1 が邪魔). この $P^{-1}AP$ のことを **A のジョルダン標準形 (Jordan canonical form of A)** という. 対角化はジョルダン標準形の特別な場合であり, 実正方行列は (複素数の範囲で) 必ずジョルダン標準形に変形できる.