数学 6 冬休み課題プリント C (出題: 2011/12/15, 提出: 2012/01/12)

科　　番　氏名：

これまでの授業では, 平面ベクトルと平面上の線型変換について考えてきた. ここでは, "矢印" には見えないものを "ベクトル" として計算してもらおうと思う. 詳しい理論は**ベクトル空間 (vector space)**, もしくは**線型空間 (linear space)** というものを勉強する必要がある.

以下では, t を変数とし, $a+bt$ (a, b は実数) の形で表わせる式 (つまり一次以下の多項式) 全体について考える. このような式は a と b を決めればただ一つ決まる. そこで, $a+bt$ という式と平面ベクトル ${}^t(a\ \ b)$ を**同じもの**と考えると, 一次以下の多項式全体の集合というのは平面ベクトル全体の集合と思うことが出来る.

以下の全ての問題に計算過程も書いて答えること.

(1) 一次式 $-3+4t$ に対応する平面ベクトルを答えよ.

(2) 平面ベクトル ${}^t(7\ \ 10)$ に対応する一次式を答えよ.

以下では, 多項式 $f(t)$ に対して $f(t)$ の導関数 (微分) を与える操作を $\dfrac{d}{dt}$ と表わす.

(3) $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1\ \ 0)$ に対応する多項式の $\dfrac{d}{dt}$ による像を, 対応する平面ベクトルで答えよ.

(4) $\boldsymbol{e}_2 = {}^t(0\ \ 1)$ に対応する多項式の $\dfrac{d}{dt}$ による像を, 対応する平面ベクトルで答えよ.

(5) $\dfrac{d}{dt}$ は線型性を満たすことを証明せよ.

(6) (3), (4) の結果を利用して $\dfrac{d}{dt}$ の表現行列 D を求めよ.

(7) D の固有値を求めよ.

(8) D の固有ベクトルを求めよ.

(9) 一次以下の多項式 $f(t) = a_1 + b_1 t$ と $g(t) = a_2 + b_2 t$ の内積 $f(t)\cdot g(t)$ を

$$f(t)\cdot g(t) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

で定義する. このとき, 平面ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1\ \ 0)$ と $\boldsymbol{e}_2 = {}^t(0\ \ 1)$ にそれぞれ対応する多項式は**垂直ではない**事を証明せよ.

(10) 線型変換 S を $S(f(t)) = e^t \dfrac{d}{dt}(e^{-t}f(t))$ で定義する. S の表現行列を求めよ.

$\dfrac{d}{dt}$ の表現行列 D は 2 乗すると 0 になる行列 (2 階のベキ零行列) のはずである. これは一次以下の多項式は 2 回微分すると 0 になることによる. ここで説明したことは一般に n 次以下の多項式全体でも成り立つし, 多項式全体や関数全体でも成り立つ. 関数や多項式をベクトルと思うことで, 扱いやすいような関数や多項式に変換して計算しようという考え方は**フーリエ変換**や**ラプラス変換**につながっていく.