演習問題 (線形代数学 I：2011/04/18)

学生番号：　　　　　　　　　　氏名：

$\boxed{1}$ 以下の問題に答えよ．

(1) 方向ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ で，点 A$(2,-3,4)$ を通る空間内の直線の方程式を求めよ．

答. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$

(2) 空間内の二点 A$(2,-3,4)$ と B$(0,1,-1)$ を通る直線の方程式を答えよ．

方向ベクトルとして $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ をとる．

答. $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-4}{-5}$

$\boxed{2}$ 以下の問題に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直で，点 A$(2,-3,4)$ を含む空間内の平面の方程式を求めよ．

求める平面は $-x+y-z+d=0$ とおける．

A$(2,-3,4)$ を通るから

$-2-3-4+d=0$

$d=9$

答. $-x+y-z+9=0$
($x-y+z=9$ も可)

(2) 空間内の三点 A$(2,3,4)$, B$(3,4,5)$, C$(4,8,7)$ を含む平面の方程式を答えよ．

$\mathbb{p} = (1-s-t)\,\mathbb{a} + s\,\mathbb{b} + t\,\mathbb{c}$ より

$$\begin{cases} x = 2+s+2t & \cdots ① \\ y = 3+s+5t & \cdots ② \\ z = 4+s+3t & \cdots ③ \end{cases}$$

①.②より sを消去して　$x-y = -1-3t$ $\cdots ④$

①.③より sを消去して　$x-z = -2-t$ $\cdots ⑤$

④.⑤より tを消去して　$-2x-y+3z=5$

答. $2x+y-3z+5=0$.

$\boxed{3}$ 空間内の直線 $\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+1}{3}$ に垂直で, 点 A $(0, -1, 2)$ を通る平面の方程式を答えよ.

求める平面は $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直で, A$(0,-1,2)$ を含む平面だから

$2x+y+3z+d=0$ とおける.

$(0,-1,2)$ を含むので

$2\cdot0+(-1)+3\cdot2+d=0$

$\therefore d=-5$

答. $2x+y+3z-5=0$

$\boxed{4}$ 空間内の平面 $2x-5y+3z=0$ に平行で, 点 A $(2,-1,3)$ を通る平面の方程式を答えよ.

求める平面は $2x-5y+3z+d=0$ とおける.

$(2,-1,3)$ を含むので

$2\cdot2-5(-1)+3\cdot3+d=0$

$\therefore d=-18$

答. $2x-5y+3z-18=0$

$\boxed{5}$ 球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 上の点 P$(3,2,1)$ における接平面の方程式を答えよ.

球面 $x^2+y^2+z^2=14$ の中心は 点C$(0,0,0)$.

よって求める接平面の方程式は 点P$(3,2,1)$ を

含む, $n=\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式だから

$3x+2y+z+d=0$ とおける.

$(3,2,1)$ を含むから $3\cdot3+2\cdot2+1\cdot1+d=0$

$\therefore d=-14$

答. $3x+2y+z-14=0$.

$\boxed{6}$ **(応用問題)** 球面 $x^2+y^2+z^2-2x-2y=11$ の中心を通り, 平面 $2x+y+2z=12$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

$x^2+y^2+z^2-2x-2y=11$ を変形して

$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=13$

(xとy, それぞれについて平方完成する)

したがって 球面 $x^2+y^2+z^2-2x-2y=11$ の

中心は 点$(1,1,0)$.

求める直線は $n=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に平行で,

点$(1,1,0)$ を通る直線なので

答. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$

$\left(\dfrac{x-1}{2} = y-1 = \dfrac{z}{2}\right.$ でも可$\left.\right)$