2011/06/27

①

McKayの対応について

石井先生

数学概論

1. 正多面体 (Platonic Solids)

	正4面体	正6面体	正8面体	正12面体	正20面体
各頂点の面の個数	正3角形 3つ	正4角形 3つ	正三角形 4つ	正5角形 3つ	正三角形 5つ

2. 正多面体群

・正多面体の重心を中心とした回転で自分自身にうつるもの全体

⟶ 合成に関して群をなす

・正4面体群

・Aのうつり先：4通り

・Aのうつり先を決めると 3通り

⇝ 位数は12.

・正6面体群 ≃ 正8面体群

・正12面体群 ≃ 正20面体群

3. SO(3)の有限部分群

$$SO(3) = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{c} A\text{は3次直交行列} \\ \det A = 1 \end{array} \right\}$$

$(= \{ \mathbb{R}^3$の線形変換で、キョリと向きを変えない$\})$

2011/06/27

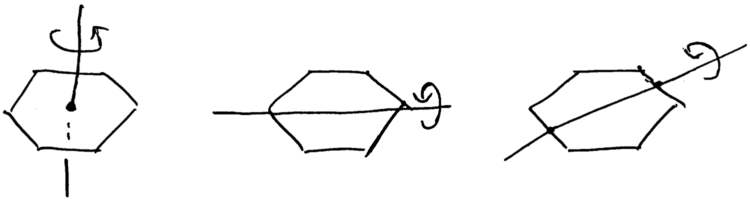
②

定理3.1 SO(3)の有限部分群 (共役を除いて)

$\left[\begin{array}{l} G \subset SO(3) \ni P \\ P^{-1}GP : G\text{と共役} \end{array}\right.$

・巡回群 ⟨ある軸のまわりの $\frac{2\pi}{n}$ 回転⟩

・正二面体群 正多角形の重心を$\mathbb{R}^3$の原点において自分自身に重ね合わせる回転の全体



・正4、8、20面体群

4. $SL(2,\mathbb{C})$の有限部分群

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{c} A\text{は複素2次正方行列} \\ \det A = 1 \end{array} \right\}$$

$$PSL(2,\mathbb{C}) := SL(2,\mathbb{C}) / \underbrace{\{\pm I_2\}}_{\text{正規部分群}}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ 1次分数変換

$$f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d} : \underbrace{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}_{\text{球面だと思う}} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

1次分数変換 : 球面 $\longrightarrow$ 球面

$\left[\begin{array}{c} \text{行列の積} \\ \updownarrow \\ \text{1次分数変換の合成} \end{array}\right.$

・$-I_2$の定める1次分数変換は恒等写像なので$PSL(2,\mathbb{C})$の元が1次分数変換を定めると思うことができる。さらに$PSL(2,\mathbb{C})$の異なる元は異なる写像を定める。

2011/06/27

3

Fact

☆ $SO(3) \subset PSL(2, \mathbb{C})$

$\because$ $SO(3) \simeq U(2)/\{\pm I_2\}$

定義 2項(2)多面体群とは，多(2)面体群 $\subset SO(3) \subset PSL(2,\mathbb{C})$ の $SL(2,\mathbb{C})$ へのひきもどし．

定理4.1 (Klein) $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群は共役をのぞいて次のいずれか：

- 巡回群． $\left\langle \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$ ζ_n : 1の原始 n 乗根
- 2項2面体群 (2角形，3角形，…)
- 2項4，8，20面体群．

5. 不変式環

$SL(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2$

- 2変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$

… $\mathbb{C}^2$ 上の多項式関数全体

$\Rightarrow$ $SL(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}[x,y]$

$\begin{array}{ccc} SL(2,\mathbb{C}) & \curvearrowright & \mathbb{C}[x,y] \\ \Psi & & \Psi \\ A & & f(x,y) \end{array}$

$(A \cdot f)(x,y) := f(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2011/06/27

④

$G \subset SL(2, \mathbb{C})$：部分群

$$\mathbb{C}[x,y]^G = \{ f \in \mathbb{C}[x,y] \mid \forall A \in G,\ A \cdot f = f \}$$

$\mathbb{C}[x,y]$ の部分環

Gによる不変式環という.

<u>例5.1</u> $G = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \subset SL(2, \mathbb{C})$

$f(x,y)$ が G-不変 $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)$ が $\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}$ で不変.

$\Longleftrightarrow$ $f(\zeta_n^{-1}x, \zeta_n y) = f(x,y)$

例えば x^n, y^n, xy は G-不変式

<u>Fact</u> • $\mathbb{C}[x,y]^G$ は x^n, y^n, xy で生成される.
$\mathbb{C}$上

つまり $\mathbb{C}[x,y]^G = \{ F(x^n, y^n, xy) \mid F:3変数多項式 \}$

• 3変数多項式 $F(u,v,w)$ について

$F(x^n, y^n, xy) = 0 \Longleftrightarrow uv - w^n \mid F$

$\Longleftrightarrow F \in \underbrace{\langle uv - w^n \rangle}_{uv-w^n \text{の生成するイデアル}}$

つまり $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[u,v,w] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y]^G \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ F(u,v,w) & \longmapsto & F(x^n, y^n, xy) \end{array}$ という環準同型の核が $\langle uv - w^n \rangle$

$\Rightarrow$ 環準同型定理より

$$\mathbb{C}[x,y]^G \simeq \mathbb{C}[u,v,w] / \langle uv - w^n \rangle$$

2011/06/27

<u>定理5.2</u> (Klein)

すべての $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群について同様のことができる.

6. 不変式と軌道空間

$G \subset SL(2,\mathbb{C})$

$\mathbb{C}^2/G = \{\, \mathbb{C}^2 \text{ における } G\text{-軌道} \,\}$

<u>軌道</u> $P, Q \in \mathbb{C}^2$

$P \sim Q \iff {}^{\exists} g \in G,\ P = gQ$

とすると $\sim$ は同値関係.

この $\sim$ に関する同値類を G-軌道という.

つまり $\mathbb{C}^2/G = \mathbb{C}^2/\sim$

$$\mathbb{C}[x,y]^G \simeq \mathbb{C}[u,v,w]/\langle F\rangle \qquad F = uv - w^n$$

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 生成元.

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \leftarrow u, v, w \in \mathbb{C}[u,v,w]$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[rr, "{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})}"] \arrow[dr] & & \mathbb{C}^3 \\
& \mathbb{C}^2/G \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

G-不変式

$\Downarrow$

G-軌道の各点で同じ値.

<u>Fact</u> Φ は $\mathbb{C}^2/G$ から $X := \{(p,q,r) \in \mathbb{C}^3 \mid F(p,q,r) = 0\}$ への全単射.

2011/06/27

6

<u>定義 6.1</u> $F_1, \cdots, F_r \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$

$$V := \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid F_i(a_1, \cdots, a_n) = 0 \quad (1 \le i \le r)\}$$

このように書ける集合をアフィン代数多様体という．

よって $\mathbb{C}^2/G$: アフィン代数多様体．

7. 特異点

$\mathbb{C}^3$ 内で $F(u, v, w) = 0$ で定義されるアフィン代数多様体 V の特異点とは，

$$\left\{ p \in V \;\middle|\; \frac{\partial F}{\partial u}(p) = \frac{\partial F}{\partial v}(p) = \frac{\partial F}{\partial w}(p) = 0 \right\}$$

の点のこと．

<u>$F(u, v, w) = uv - w^n$ の場合 $(n \ge 2)$</u>

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial w} = -nw^{n-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial w} = F = 0 \iff (u, v, w) = (0, 0, 0)$$

O が X の孤立特異点