2011/07/04　McKayの対応について　　石井先生

①　　数学概論

$$\mathbb{C}[u,v,w] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]^G$$
$$u,v,w \longmapsto \bar{u},\bar{v},\bar{w}$$

Ker が $F = uv - w^n$ で生成

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2/G & \xrightarrow{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})} & \mathbb{C}^3 \\ & \searrow^{\sim} & \cup \\ & & X = \{(p,q,r) \in \mathbb{C}^3 \mid F(p,q,r) = 0\} \end{array}$$

アフィン代数曲面

Xの特異点

$$\left\{ P = (p,q,r) \in X \;\middle|\; \frac{\partial F}{\partial u}(P) = \frac{\partial F}{\partial v}(P) = \frac{\partial F}{\partial w}(P) = 0 \right\}$$
$$\Updownarrow$$
$$F(P) = 0.$$

Th.5.2の Fについて Xは原点のみを特異点にもつ
↑
Klein 特異点

特異点解消

定義8.1　（簡単のため）Xは Pのみを特異点にもつとする

Xの特異点解消とは，（Y, f）で

- Y：非特異代数多様体
- fは固有射　（$f: Y \to X$）
- $Y \setminus f^{-1}(P) \simeq X \setminus \{P\}$

2011/07/04

②

我々の場合

$$X=\mathbb{C}^2/G \subset \mathbb{C}^3, \quad G\subset SL(2,\mathbb{C})$$

定理8.2 (Du Val, 1934)

$\exists f: Y \longrightarrow X$ : 特異点解消

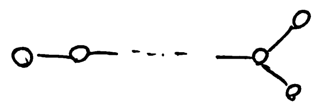
s.t. ・ $f$は特異点解消の中で「最小」のもの

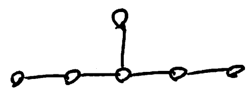
・ $f^{-1}(0)$ はいくつかの $\mathbb{P}^1$ (リーマン球面) の連なったもの

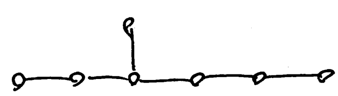
・ $f^{-1}(0)$ の $\mathbb{P}^1$ を ○ とし, 2つの $\mathbb{P}^1$ が交わっているときにその2つの ○ を結ぶ

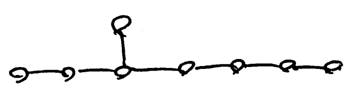
結果は

G: 巡回群のとき  A

G: 二項二面体群のとき  D

G: 二項4面体群のとき  $E_6$

G: 二項8  $E_7$

G: 二項20  $E_8$

これまで

$G\subset SL(2,\mathbb{C}) \rightsquigarrow X=\mathbb{C}^2/G$ 特異点

$\rightsquigarrow Y\to X$ 最小特異点解消

$\rightsquigarrow$ Dynkin 図形

McKay
群の表現

2011/07/04

③

## $\boxed{\text{群の表現}}$

$G$：群.

$G$の（$\mathbb{C}$上の）表現（$\rho, V$）とは,

・$V$は$\mathbb{C}$－線型空間

・$\rho : G \to \underbrace{GL(V)}$ 群準同型

$GL(V) = \{V \to V \text{ 線型同型}\}$

・<u>キヤク表現</u>

$G$の表現（$\rho, V$）が既約

$\iff$ $V$の$G$－不変部分空間は $0$ と$V$のみ.

部分空間 $W \subseteq V$ が $G$－不変

$\iff$ $\forall g \in G,\ \rho(g)(W) \subseteq W$.

・（$\rho, V$），（$\tau, W$）：ともに$G$の表現

$\Rightarrow$ ・$\exists(\rho\oplus\tau, V\oplus W)$：直和表現

・$\exists(\rho\otimes\tau, V\otimes W)$：テンソル表現.

・自明なキヤク表現

$$\begin{array}{rcl} \rho_0 : G & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times \\ \rotatebox{90}{$\in$}\ & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & 1 \end{array}$$

・$(\rho, V) \cong (\tau, W)$ （同型）

$\iff$ $\exists f : V \to W$：線型同型 s.t. $\forall g \in G$,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\tau(g)"'] & W \end{tikzcd}$$

2011/07/04
(月)

## Fact

- $G$ が有限群のとき
  - $G$ の既約表現の同型類の集合 $\mathrm{Irr}(G)$ は有限.
  - $G$ の任意の表現は既約表現の直和に同型.

## 我々の設定にもどる

$G \subset SL(2,\mathbb{C})$ 有限部分群.

$\mathrm{Irr}(G) = \{\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_l\}$ とする.

$\rho_0$ : 自明表現

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, bend right] & \subset SL(2,\mathbb{C}) \subset & GL(\mathbb{C}^2) \end{tikzcd}$$

$G$ の2次元表現 $\rho_{can}$ (canonical rep.)

## McKay's observation

$$\rho_i \otimes \rho_{can} = \bigoplus_{j=0}^{l} \rho_j^{\oplus a_{ij}}$$

という既約分解により $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を定める.
(左辺を既約分解したときに $\rho_j$ が $a_{ij}$ 個 でてくる)

$\Longrightarrow$ ・ $a_{ij} = a_{ji}$ : 1 か 0 のどちらか.

・ $\rho_1, \cdots, \rho_l$ を $\circ$ で書く.
$a_{ij} = 1$ のときにそれらを結ぶと
特異点解消から得られたのと同じ Dynkin 図形が得られる.

2011/07/04
⑤

例　巡回群

$$G = \left\langle \overset{g_0}{\boxed{\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}}} \right\rangle \subset SL(2,\mathbb{C})$$

Gの既約表現はすべて1次元で

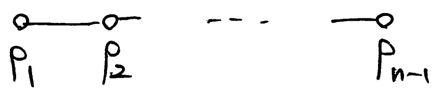
$$\begin{array}{ccc} \rho_i : G & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ g_0 & \longmapsto & \zeta_n^i \end{array} \qquad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

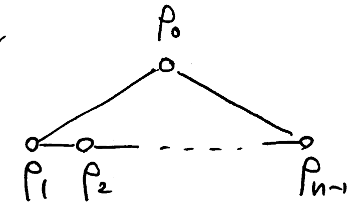
$\downarrow$
$\ell = n-1$

$$\rho_{can} = \rho_1 \oplus \rho_{-1}$$

$$\rho_i \otimes \rho_{can} = \rho_{i+1} \oplus \rho_{i-1}$$

$$\therefore\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & i-j = \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$




(

$\rho_0$を入れると拡大Dynkin図形になる.)

McKay対応

最小特異点解消
$Y \to X = \mathbb{C}^2/G$ の
キヤク例外直線 ($\mathbb{P}^1$)

$\longleftrightarrow$

Gの非自明
キヤク表現

という対応があるだろう.

いろいろわかってきた.

2011/07/04

⑤

$Y$の幾何学 $\longleftrightarrow$ ($G$の表現論)

$Y$の幾何学 $\longleftrightarrow$ $G$の作用する $\mathbb{C}^2$ の幾何学

$\Updownarrow$

非可換環 $\mathbb{C}[x,y]\# G$ の幾何学

群と(可換)環の半直積のようなもの.

・いろいろ一般化がある.