2011/12/13 S^3内の円織面の特異点

①

佐治さん(岐阜大)
トポロジー・幾何学セミナー

泉屋周一氏，永井隆之氏(北大)との共同研究

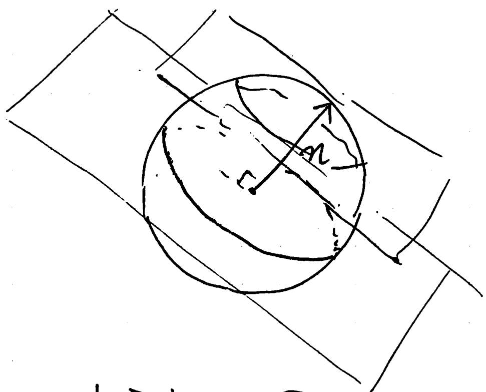
§1 序

$$S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x| = 1\}$$

$c \in [0, 1)$, $n \in S^3$

大球：$\{x \in S^3 \mid n \cdot x = 0\}$

小球：$\{x \in S^3 \mid n \cdot x = c ,\ c \neq 0\}$



大円：大球の大円

小円：大球の小円 ＝ 小球の大円 ＝ 小球の小円

$\Delta \subset S^3 \times S^3$

$\Delta = \{(x, y) \in S^3 \times S^3 \mid x \cdot y = 0\}$ 5次元

$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ 内の 1-forms θ_1, θ_2 を

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{4} x_i dy_i , \quad \theta_2 = \sum_{i=1}^{4} dx_i \cdot y_i$$

とすると

θ_1, θ_2 は Δ 上で同じ超平面場 K を定める

$\theta := \theta_1 |_\Delta$

2011/12/13

②

θ: Δ上の contact form.

$\left(d\theta : K_p \times K_p \longrightarrow \mathbb{R} \right.$ が非退化 $\left. \forall p \in \Delta \right)$

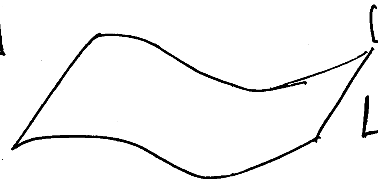
さらに

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Delta \subset S^3 \times S^3 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ S^3 & & S^3 \end{tikzcd}$$

π_1, π_2は共に Legendre fibration

$\left(\pi_1^{-1}(\text{一点}) \right.$ が Kに接する$\left. \right)$

$S^3 \times S^3 \supset \Delta$

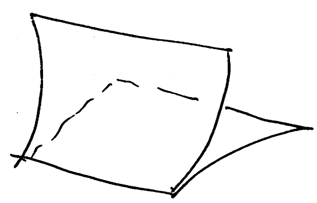


Leg. submfd

L

$\downarrow \pi$

S^4



$\pi(L)$: 波面集合.

$U \subset \mathbb{R}^2$: 領域

$L = (f, g) : U \longrightarrow \Delta$ が isotropic

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $L^*\theta = 0$.

2011/12/13
3

こういう時

$f: U \to S^3$ は $g: U \to S^3$ の Δ-dual
$g:$ ―〃― は $f:$ ―〃― の ―〃―.

f と g は互いに Δ-dual

◎ $f: U \to S^3$ が半波面
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists g: U \to S^3$ s.t. (f, g) は isotropic.

◎ $f: U \to S^3$ が波面
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 半波面, (f, g) : isotropic immersion.

例 $f: U \to S^3$: imm.
$(U: u, v)$ $\qquad f_u = \dfrac{\partial f}{\partial u}$

$g := f_u \times f_v \times f / |f_u \times f_v \times f|$ ← f のガウス写像

(f, g) : isotropic imm.
$\therefore f$: 波面.

---

g: 特別な性質 ⇝ f は?

① g : 1点 $\Longrightarrow$ f = 大球 $= \{x \mid x \cdot g = 0\}$

② g : 曲線
f : imm. umbilic free ($U: u, v$: 曲率線座標)

2011/12/13

④

f のガウス写像 $\equiv 0$.

uー曲線 $=$ 0ー方向 (~~主曲率~~ 0 方向)

vー〃 $=$ そうじゃない.

$$g_u(u,v)=0, \quad g_v(u,v) = -k(u,v)\, f_v(u,v)$$

$$g(u,v) = \gamma(v)$$

このとき

$$\Phi : S^3 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(x, v) = g(0,v) \cdot x$$

とすると.

$$\Phi^{-1}(0) = \{(x,v) \mid g(0,v)\cdot x = 0\}$$

<u>補題</u> $\mathrm{image}\, f \subset D_\Phi = \{x \mid {}^\exists v,\ \Phi(x,v) = \Phi_v(x,v) = 0\}$

$\because$ $\Phi(f(0,v), v) = g(0,v)\cdot f(0,v) = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial u}\Phi(f(u,v), v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(g(0,v)\cdot f(u,v)\right)$$
$$= g(0,v)\cdot f_u(u,v)$$
$$= g(u,v)\cdot f_u(u,v)$$
$$= 0.$$

$\therefore$ $\Phi(f(u,v), v) = 0$ $\left(\begin{array}{c}\Phi_u(f(u,v), v) = 0 \\ \text{も同様}\end{array}\right)$

2011/12/13

5

$$\tilde{f}(\theta, v) := \cos\theta \cdot \boxed{f(0,v)} + \sin\theta \boxed{\frac{f_u(0,v)}{|f_u(0,v)|}}$$

これらで生成される大円.

とすると

$\mathrm{image}\,\tilde{f} \subset D_{\Phi}$

fは大球の1-パラメーター族の包絡線で，

大円の1-パラメーター族

これを調べよう！　大円織面という.

(great circular surf.)

g.c.s.

$\mathbb{R}^4$ の onb を

$$\left.\begin{aligned} a_0(t) &= g(u_0, t) \\ a_1(t) &= f(u_0, t) \\ a_2(t) &= \frac{f_t(u_0,t)}{|f_t(u_0,t)|} \\ a_3(t) &= \frac{f_u(u_0,t)}{|f_u(u_0,t)|} \end{aligned}\right\} \text{フレーム場.}$$

$$\tilde{f} = \cos\theta \cdot a_1 + \sin\theta \cdot a_3.$$

2. フレームの不変量

$a_0(t), \cdots, a_3(t) : I \longrightarrow S^3$: onb.

$$\begin{aligned} c_1(t) &:= a_0' \cdot a_1 \\ c_2(t) &:= a_0' \cdot a_2 \\ c_3(t) &:= a_0' \cdot a_3 \\ c_4(t) &:= a_1' \cdot a_2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} c_5(t) &:= a_1' \cdot a_3 \\ c_6(t) &:= a_2' \cdot a_3 \end{aligned}$$

とすると

2011/12/13

⑥

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}}_{A'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_1 & 0 & c_4 & c_5 \\ -c_2 & -c_4 & 0 & c_6 \\ -c_3 & -c_5 & -c_6 & 0 \end{pmatrix}}_{C(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{A(t)}$$

となる．

$$A'(t) = C(t)A(t)$$

$$C(t) \in so(4)$$

$$C(t) : I \longrightarrow so(4) \quad : \text{given.}$$

$$A(t_0) \in SO(4)$$

$$\exists A(t) : I \longrightarrow SO(4) \quad \text{s.t.} \quad C(t) = A'(t)A^{-1}(t)$$

$$\{C : I \longrightarrow so(4)\} = \text{大円織面.}$$

大円織面全体の空間

+ Whitney C^∞-位相.

3. 特異点

$$f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$$

0 が f の特異点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\operatorname{rank} df_0 < 2$.

特異点の集合 $= S(f)$

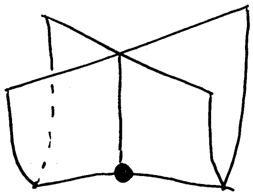
$f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ が $\mathcal{A}$-同値

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} \exists \sigma : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0) \\ \exists \tau : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0) \end{array}\right\}$ diffeos s.t. $g = \tau \circ f \circ \sigma$.

2011/12/13

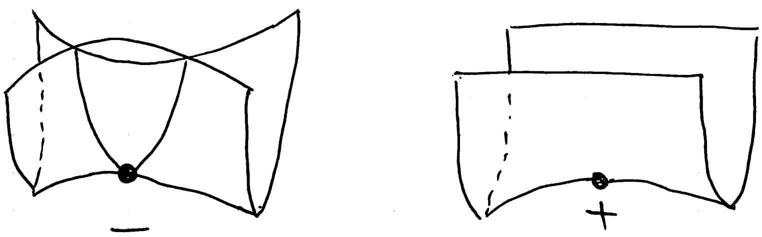
⑦

例 $f(u,v) = (u, v^2, uv)$



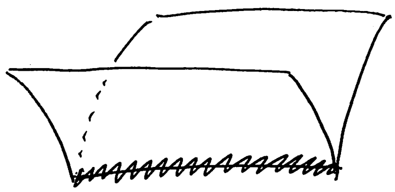
ホイットニーの傘
WU

$f(u,v) = (u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$



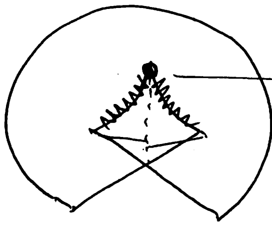
CMM

$f(u,v) = (u, v^2, v^3)$



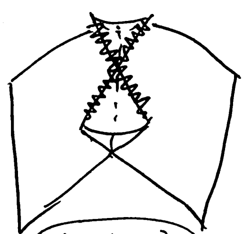
カスプ辺 ce.

$f(u,v) = (u, 4u^2+2uv, 3v^4+uv^2)$



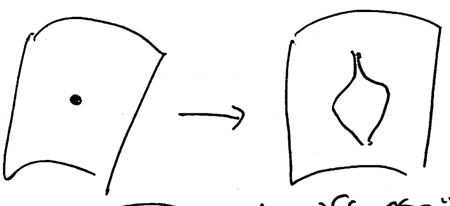
スワローテイル
SW

$f(u,v) = (u, 2v^3 \pm u^2 v, 3v^4 \mp u^2 v^2)$



± 上の方

カスプ的くちばし
Cbk



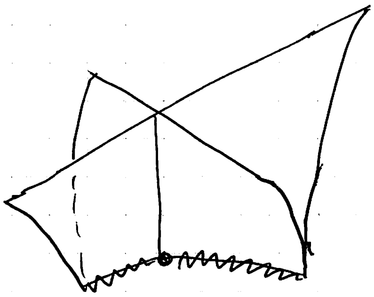
± 下の方

カスプ的くちびる
clp.

2011/12/13

⑧

$f(u,v) = (u, v^2, uv^3)$



カスプ的ホイットニーの傘
CWU

4. 大円織面の特異点

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} : I \longrightarrow SO(4)$$

$$F = F_A(\theta, t) = \cos\theta \cdot a_1(t) + \sin\theta \cdot a_3(t)$$

$$(\theta_0, t_0) \in S(F)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \underbrace{C_1 C_6 + C_3 C_4}_{= C_K} = 0 \\ \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_4 & -C_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad \text{at } t_0. \quad \text{☆}$$

$$F \text{ at } (\theta_0, t_0) \underset{\mathcal{A}}{\sim} WU$$

$$\Longleftrightarrow C_K = 0, \; C_K' \neq 0, \; \text{☆ at } t_0.$$

C_Kの幾何的意味.

Fのガウス曲率.

$$K = \frac{-C_K^2}{(\cos\theta \cdot C_4 - \sin\theta \cdot C_6)^2 + (\cos\theta \cdot C_1 + \sin\theta \cdot C_3)^2}$$

2011/12/13

9

$C_K \equiv 0$ とする.

フレームのとりかえで $C_3 \equiv 0$ とできる.

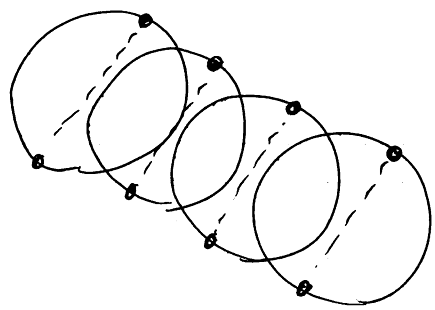
さらに $C_1 \equiv 0$ とする.

とすると

$g = a_0$ とすれば, a_0 は F の Δ-dual.

特異点は ce, sw, cwu 等が出る

さらに $C_4 \equiv 0$ とすると $S(F) = \{(0,t), (\pi,t)\}$



$a_1 \cos t + a_3 \sin\theta$

$F(S(F)) = \{\pm a_1\}$

a_1 の Δ-dual は $C_1 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$ のもと.

$F_A^{\#} := \cos\theta \cdot a_0 + \sin\theta \cdot a_2$

$F_A^{\#}(S(F_A^{\#})) = \{\pm a_0\}$

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, squiggly, "\Delta\text{-dual}"] & F \arrow[d, squiggly, "\text{特異点}"] \\
F_A^{\#} \arrow[u, squiggly, "\text{特異点}"] & a_1 \arrow[l, squiggly, "\Delta\text{-dual}"]
\end{tikzcd}$$

$S(F_A^{\#}) = \{(0,t), (\pi,t)\}$

2011/12/13

10

特異点の条件.

	ce	SW	CWU
F_A $\theta_0=0,\pi$	$c_2c_5c_6 \neq 0$	$c_5=0$ $c_2c_6c_5' \neq 0$	$c_2=0$ $c_2'c_5c_6 \neq 0$
$F_A^{\#}$ $\theta_0=0,\pi$	$c_2c_5c_6 \neq 0$	$c_2=0$ $c_2'c_5c_6 \neq 0$	$c_5=0$ $c_2c_6c_5' \neq 0$

5. 特異点の双対性

$f:(\mathbb{R}^2,0) \longrightarrow (S^3,0)$　半波面

$\lambda := \det(f_u, f_v, f, \nu)$　（ヤコビ行列式）

$\lambda^{-1}(0) = S(f)$

$0 \in S(f)$

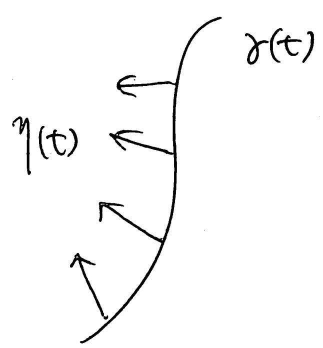
$d\lambda(0) \neq 0$. とする.

$\Longrightarrow \exists \gamma(t):((-\varepsilon,\varepsilon),0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2,0)$ s.t. $\gamma(t)$ は $S(f)$ の正則なパラメーター表示.

$\eta(t)$: γ に沿ったベクトル場

$\langle \eta(t) \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Ker} df_{\gamma(t)}$

とする.



DATE / NO. 2011/12/13 (11)

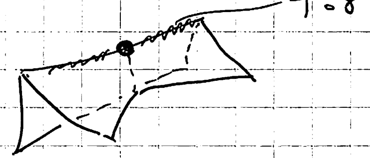
TITLE

$$\psi = \det\left((f\circ\gamma)'(t),\ \nu\circ\gamma(t),\ (\eta\nu)\circ\gamma(t),\ f\circ\gamma(t)\right)$$

このとき

$(f\circ\gamma)'(0) \neq 0$ かつ $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) \neq 0$.

$\iff$ f at 0 $\underset{\mathcal{A}}{\sim}$ CWU



$(\nu\circ\gamma)'(0) \neq 0$ かつ $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) \neq 0$

$\iff$ f at 0 $\underset{\mathcal{A}}{\sim}$ SW