2012/1/23 リッチフローと正曲率多様体

①

石田先生（上智大）
集中講義

予定

1. 準備（曲率テンソル，リッチ曲率 …）
2. Perelman's Harnack quantity（計算）
3. 計算の続き ＋ W-entropy
4. W－entropy の単調性
5. 非局所崩壊定理（概略）＋ α
   (No Local Collapsing Thm)

M : m次元 C^∞ 級閉多様体

$C^\infty(M)$: M 上の C^∞ 級関数全体の集合

$p \in M$: M の点

T_pM : 点 P における M の接ベクトル空間

$T_p^*M = \{ f \mid f: T_pM \to \mathbb{R}$ 線形写像$\}$ 余接ベクトル空間

（T_pM の双対空間）

$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$: 接ベクトル束

$T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$: 余接ベクトル束

$X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$: M 上のベクトル場全体のなす集合

$\omega \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$: M 上の 1-形式の全体のなす集合

$$\mathfrak{X}(M) \ni X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

（アインシュタインの総和法）

$$\Omega^1(M) \ni \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i = \omega_i dx^i$$

2012/1/23

②

<u>定義</u>（線形接続）

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla(X,Y) := \nabla_X Y.$$

YのXによる共変微分.

が次の条件をみたすとき, ∇を線形接続という

(1) ∇は$\mathbb{R}$上の双線形写像

(2) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \quad (\forall f\in C^\infty(M))$

(3) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

注 $X=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ とするとき.

$$\nabla_X Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(=\sum_{k=1}^m \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

∇の<u>接続形式</u>という

$g=\{g_p\}$: M上のリーマン計量

$$g_p : T_pM\times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{双線形})$$
$$(u, v) \longmapsto g_p(u,v)$$

(1) $g_p(u,v) = g_p(v,u)$

(2) $g_p(u,v) > 0$, $v\neq 0$.

$$g_p : T_pM\times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X_p, Y_p) \longmapsto g_p(X_p,Y_p)$$

$X_p = X^i(p)\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, $Y_p = Y^j(p)\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ と書くとき,

$$g_p(X_p,Y_p) = g_p\left(X^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, Y^j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = X^i(p)Y^j(p)\boxed{g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)} = g_{ij}(p)$$

以下, このように書く.

2012/1/23

③

上の記号の下，$g=(g_{ij})$

リーマン計量は $(0,2)$ テンソル場を定める．

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

$$\left(= \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j\right)$$

~~(定理)~~

<u>定義</u>（レビ－チビタ接続）

(M, g) ：リーマン多様体

このとき，M 上の線形接続 $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ で，

次をみたすものが存在する．　$(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$

$$\begin{cases} (1)\ T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \underbrace{[X,Y]}_{=XY-YX} = 0 \\ (2)\ X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{cases}$$

（リーマン計量と両立する接続）

この ∇ を <u>レビ－チビタ接続</u>という

$\boxed{\text{注意}}$　(1) $2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y)$

$$+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)$$

(2) レビ－チビタ接続の接続形式 Γ_{ij}^k は次をみたす．

(1) において $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$，$Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ とすると

次が成り立つ．

l について和

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right)$$

$g = (g_{ij})$　$g^{-1} = (g^{ij})$

2012/1/23

④

以下，レビ・チビタ接続を考える

定義（曲率テンソル $Rm_{(1,3)}$）

$$Rm_{(1,3)} : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

（双線形）
$$(X, Y, Z) \longmapsto Rm_{(1,3)}(X,Y,Z)$$

$$Rm_{(1,3)}(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

これを ∇ の曲率テンソルという.

局所座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ をとると $Rm_{(1,3)}$ は
次のように書ける.

$$Rm_{(1,3)} = R_{ijk}^{\ \ \ l} \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$ ← i, j, k, l について和

以下，
$$Rm_{(1,3)} = \left(R_{ijk}^{\ \ \ l}\right)$$ などと書く.

$Rm_{(1,3)}$ は次をみたす

第一ビアンキ恒等式

$$Rm_{(1,3)}(X,Y,Z) + Rm_{(1,3)}(Y,Z,X) + Rm_{(1,3)}(Z,X,Y) = 0$$

$$\left(R_{ijk}^{\ \ \ l} + R_{jki}^{\ \ \ l} + R_{kij}^{\ \ \ l} = 0\right)$$

定義（リーマン曲率テンソル $Rm_{(0,4)}$）

$$Rm_{(0,4)} : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$(X, Y, Z, W) \longmapsto Rm_{(0,4)}(X,Y,Z,W)$$

2012/1/23

⑤

$$Rm_{(0,4)}(X,Y,Z,W) = g(Rm_{(1,3)}(X,Y,Z), W)$$

(gはリーマン計量).

局所座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ をとると,

$$Rm_{(0,4)} = R_{ijkl}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

$$= g_{lm} R_{ijk}^{\ \ \ m}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

$$Rm_{(0,4)} = (R_{ijkl}) \underset{\uparrow}{=} (g_{lm} R_{ijk}^{\ \ \ m})$$

添え字を下げる.

㊟

$$R_{ijkl} = Rm_{(0,4)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$= g\Big(\underbrace{Rm_{(1,3)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{= R_{ijk}^{\ \ \ m} \frac{\partial}{\partial x^m}}, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big)$$

$$= g\left(R_{ijk}^{\ \ \ m} \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$= R_{ijk}^{\ \ \ m}\, \underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)}_{= g_{ml}}$$

$$= g_{ml} R_{ijk}^{\ \ \ m}$$

<u>$Rm_{(0,4)}$の対称性</u>

(1) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

(2) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$

(3) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

(4) $R_{ijkl} = R_{klij}$

レポート
定義に従って
導出しなさい.

2012/1/23

⑥

計量縮約についての1注意

M: m次元C^∞級多様体

TMのファイバー計量

$$\begin{cases} g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j : M\text{のリーマン計量.} \quad (g = (g_{ij})) \\ g^{-1} = g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \longleftarrow T^*M\text{のファイバー計量.} \end{cases}$$

これをつかって $\mathfrak{X}(M) \simeq \Omega^1(M)$ (同一視)

$g = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta$

$$\mathfrak{X}(M) \ni X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \xrightarrow{g\otimes} g \otimes X = g_{\alpha\beta} X^i\, dx^\alpha \otimes \underbrace{dx^\beta \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}_{dx^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^\beta}$$

$$\Big\downarrow \mathrm{tr}.$$

$$\mathrm{tr}_2^3 (g \otimes X) = g_{\alpha\beta} X^i \delta_i^\beta\, dx^\alpha$$

$$= \boxed{g_{\alpha\beta} X^\beta}\, dx^\alpha$$

$$\boxed{g_{\alpha\beta} X^\beta} = X_\alpha$$

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

$$X = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \overset{\mathrm{tr}_g}{\longmapsto} X_\alpha\, dx^\alpha = X^\flat \quad (X_\alpha = g_{\alpha\beta} X^\beta)$$

$$\omega^\# = X = \omega^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \xleftarrow[g^{-1}\otimes\omega]{\mathrm{tr}_{g^{-1}}} \omega = \omega_i\, dx^i$$

$\omega^\alpha = g^{\alpha i} \omega_i$

☆ tr_g は添え字を下げる $\flat$

$\mathrm{tr}_{g^{-1}}$ は 〃 上げる $\#$

2012/1/23

⑦

定義（リッチ曲率）

(M, g)：リーマン多様体

$$\begin{array}{rccc} Ric : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (X, Y) & \longmapsto & Ric(X, Y) \end{array}$$

$$Ric = tr(g^{-1} \otimes Rm_{(0,4)})$$

$$\begin{cases} g^{-1} = g^{\alpha\beta} \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^\beta} \\ Rm_{(0,4)} = R_{ijkl}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \end{cases}$$

$$g^{-1} \otimes Rm_{(0,4)} = g^{\alpha\beta} R_{ijkl} \underset{1}{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \otimes \underset{2}{\frac{\partial}{x^\beta}} \otimes \underset{3}{dx^i} \otimes \underset{4}{dx^j} \otimes \underset{5}{dx^k} \otimes \underset{6}{dx^l}$$

$$tr_1^3 tr_2^6 (g^{-1} \otimes Rm_{(0,4)}) = g^{\alpha\beta} R_{ijkl} \delta^i_\alpha \delta^l_\beta \, dx^j \otimes dx^k$$

$$= \underbrace{\boxed{g^{il} R_{ijkl}}}_{\displaystyle \shortparallel \atop \displaystyle R_{jk}} dx^j \otimes dx^k$$

つまり $Ric = (R_{jk}) = (g^{il} R_{ijkl})$ と書いてよい。

スカラー曲率

$R : M \longrightarrow \mathbb{R}$ （M上の関数）

$$R \underset{\substack{\uparrow \\ \text{定義}}}{=} tr(g^{-1} \otimes Ric)$$

$$g^{-1} \otimes Ric = g^{\alpha\beta} R_{ij} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \otimes dx^i \otimes dx^j$$

$$= g^{\alpha\beta} R_{ij} \delta^i_\alpha \delta^j_\beta = g^{ij} R_{ij}$$

2012/1/23
⑧

したがって $R = (g^{ij} R_{ij})$ と書いてよい.

定義（リッチフロー）

M : m次元 C^∞級閉多様体.

$g(t) = g_{ij}(t)\, dx^i \otimes dx^j$

リーマン計量の 1-parameter family $\{g(t)\}$ が

リッチフロー（Ricci flow）

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = -2R_{ij}(g(t)), \quad g(0) = g_0.$$

ここは 計量の2階微分と

Γ_{ij}^k のかけ算からなる量.

• Laplacian Δ

定義（関数の Hessian）

$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ レビ-チビタ接続

$f \in C^\infty(M)$

(0,2)-テンソル

$$(\nabla\nabla f)(X, Y) \overset{\text{定義}}{=} X(Y(f)) - \nabla_{\nabla_X Y} f.$$

$$\Delta f = \mathrm{tr}(g^{-1} \otimes \nabla\nabla f)$$

Δ を Laplacian という.

明日 $\left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)}\right)(f) = 2 \langle \mathrm{Ric}, \nabla\nabla f \rangle.$