2012/1/24
①

石田先生
集中講義

$\mathfrak{X}(M)$：M上のベクトル場全体

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$ ：レビ-チビタ接続

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y = \nabla(X,Y)$$

$$\begin{cases} (1)\ \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \\ (2)\ Z g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \end{cases}$$

$$Rm_{(1,3)} = (R_{ijk}^{\ \ \ l})$$

$$Rm_{(0,4)} = (R_{ijkl}) = (g_{ml} R_{ijk}^{\ \ \ l})$$

$$Ric = (R_{ij}) = (g^{kl} R_{kijl})$$

$$R = (g^{ij} R_{ij})$$

---

## Laplacian

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$ ：レビ-チビタ

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

$$(X, \omega) \longmapsto \nabla_X \omega$$ ← 1-形式 ω の X による共変微分

$$(\nabla_X \omega)(Y) \overset{\text{定義}}{=} X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y)$$

$Y \in \mathfrak{X}(M)$

$(\nabla\omega)(X,Y) = (\nabla_X\omega)(Y)$ とも書く

$$(\nabla\omega)(X,Y) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y)$$

⋮

①

2012/1/24
②

$f \in C^\infty(M)$

$\nabla f \left(= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) \in \Omega^1(M)$

を考え, $\omega = \nabla f$ として ① に代入すると

$$(\nabla\nabla f)(X,Y) = X(\nabla f)(Y) - \nabla f(\nabla_X Y)$$
$$= XY(f) - \nabla_{\nabla_X Y} f.$$

定義 ($f$ の Hessian)

$$\underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{Hess}(f)(X,Y)}}{(\nabla\nabla f)(X,Y)} = XY(f) - \nabla_{\nabla_X Y} f.$$

$X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ とすると

$$\nabla_i\nabla_j f = (\nabla\nabla f)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \nabla_{\underset{\substack{\parallel \\ \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}}}{\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j}}} f \quad = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

つまり

$$\boxed{\nabla_i\nabla_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}}$$

( $(0,2)$-テンソル $\nabla\nabla f$ の $(i,j)$ 成分
$$\nabla\nabla f = \nabla_i\nabla_j f\, dx^i \otimes dx^j$$ )

定義 (Laplacian)

$(M, g)$ リーマン多様体 $\qquad g = (g_{ij})$, $g^{-1} = (g^{ij})$

$f \in C^\infty(M)$ $\qquad \Delta_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

$$\Delta_g f \underset{定義}{=} g^{ij}\nabla_i\nabla_j f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) \quad \left(= \sum_{i,j}^{m} g_{ij}(\sim)\right)$$

2012/1/24
③

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} \quad \text{リッチフロー}$$

$$Rm_{(0,4)} = (g_{ml} R_{ijk}^{\ \ \ m})$$

$$Ric = (R_{ij}) = (g^{kl} R_{kijl})$$

$$\Delta_g f = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right)$$

計量がうごけば，$g^{ij}$，$\Gamma_{ij}^k$ もうごく

**命題**

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} \quad : \text{リッチフロー}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)}\right)(f) = 2 \langle Ric, \underbrace{\nabla\nabla f}_{= \mathrm{Hess}(f)} \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_g f) = \frac{\partial}{\partial t}\left( g^{ij} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)}_{\nabla_i \nabla_j f} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left( g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}\right) \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} - g^{ij} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) \quad \text{— ②}$$

・ $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$ のとき次が成り立つ．

レポート
(1) $$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2R^{ij} = 2 g^{ki} g^{lj} R_{kl} \quad \text{— ③}$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = - g^{kl} \left( \nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij} \right) \quad \text{— ④}$$

2012/1/24

④

$$\left( \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \right)$$

Normal coordinate をとって計算する

②, ③, ④ を使う

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \Delta_g \right)(f) = \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \overbrace{\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)}^{= \nabla_i \nabla_j f} - g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

$$= \underbrace{2 R^{ij} \nabla_i \nabla_j f}_{= 2\langle Ric, \nabla\nabla f \rangle} - g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

④ を用いて ここが 0 であることを見る.

$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^{k} = -g^{ij} g^{kl} (\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij})$$

$$= -g^{ij} g^{kl} \nabla_i R_{jl} - g^{ij} g^{kl} \nabla_j R_{il} + g^{ij} g^{kl} \nabla_l R_{ij}$$

$$= -g^{kl} \underbrace{\nabla^j R_{jl}}_{= \frac{1}{2}\nabla_l R} - g^{kl} \underbrace{\nabla^i R_{il}}_{= \frac{1}{2}\nabla_l R} + g^{kl} \nabla_l \underbrace{g^{ij} R_{ij}}_{= R}$$

注 $Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla g = 0.$$

twice contracted Bianchi identity

$$\nabla^j R_{jl} = \frac{1}{2} \nabla_l R$$

つまり

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \Delta_g \right) f = 2 \langle Ric, \nabla\nabla f \rangle$$ が出た. ∎

2012/1/24
⑤

## 2. Perelman's Harnack quantity

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}, \quad t \in [0,T) \quad \text{リッチフロー}$$

$$T \leq \infty.$$

- $\Box^* \underset{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{g(t)} + R_{g(t)}$ （共役熱作用素）
- $u$ は $\Box^* u = 0$ をみたすとする $(u>0)$
- $\frac{\partial \tau}{\partial t} = -1$, $\tau(t) > 0$ $(\tau = T - t, \ t \in [0,T))$

このとき,

$u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f}$ で $f$ を定義する. $n = \dim M$

The entropy formula for the Ricci flow + ...

> 定理A (Perelman '02, Prop 9.1)
>
> $$w \underset{\text{def}}{=} [\tau(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) + f - n]$$
>
> とする. このとき
>
> $$\Box^*(wu) = -2\tau \left| Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau} \right|^2 u$$

Routine computation by Perelman!

以下,

(1) $\Box^*(wu)$ を計算する ← 難しい

(2) $-2\tau \left| Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau} \right|^2$ を計算する ← 簡単

(3) (1), (2) が一致することを見て, 定理Aを示す.

$$|\nabla f|^2 \underset{\text{def}}{=} g^{ij} \nabla_i f \nabla_j f$$

2012/1/24

⑥

## (1) $\square^*(wu)$ の計算

$$wu = [\tau(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) + f - n]u$$

$$\square^*(wu) = \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + R\right)(wu)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(wu) - \Delta(wu) + Rwu$$

補題1

$$\Delta(wu) = (\Delta w)u + 2\langle \nabla w, \nabla u\rangle + w(\Delta u)$$

(証明)

$$\Delta(wu) = g^{ij}\nabla_i\nabla_j(wu)$$
$$= g^{ij}\nabla_i(\nabla_j w u + w\nabla_j u)$$
$$= g^{ij}(\nabla_i\nabla_j w u + \nabla_j w\nabla_i u + \nabla_i w\nabla_j u + w\nabla_i\nabla_j u)$$
$$= (\Delta w)u + \underbrace{g^{ij}(\nabla_j w\nabla_i u + \nabla_i w\nabla_j u)}_{\shortparallel} + w(\Delta u)$$
$$2g^{ij}\nabla_j w\nabla_i u = 2\langle \nabla w, \nabla u\rangle$$ と書く.

補題2　$u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-f}$ とするとき,

$$-u^{-1}\nabla u = \nabla f.$$

(証明)

$$\nabla u = \nabla\left((4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-f}\right)$$
$$= (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}\nabla(e^{-f}) \quad = -\nabla f\cdot e^{-f}$$
$$= -(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}\nabla f\cdot e^{-f} \quad = -u\nabla f.$$

つまり $\nabla u = -u\nabla f$ なので $-u^{-1}\nabla u = \nabla f.$ $\boxed{q}$

2012/1/24

⑦

補題1,2を

$$\Box^*(wu) = -\frac{\partial}{\partial t}(wu) - \underbrace{\Delta(wu)}_{\text{補題1}} + Rwu$$

代入してまとめる

$$\stackrel{\text{代入してまとめる}}{=} \left(-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)w\right)u + w\Big[\underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial t}-\Delta+R\right)u}_{\Box^*u=0}\Big] - 2\langle\nabla w, \nabla u\rangle$$

$$= \left(-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)w\right)u - 2\langle\nabla w, \nabla u\rangle = \Box^*(wu)$$

$\Box^*(wu)$ の代わりに $u^{-1}\Box^*(wu)$ を計算すると

$$u^{-1}\Box^*(wu) = -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)w - 2u^{-1}\langle\nabla w, \nabla u\rangle$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)w + 2\langle\nabla w, \underbrace{-u^{-1}\nabla u}_{\text{補題2}}\rangle \quad = \nabla f.$$

**命題3** $\quad u^{-1}\Box^*(wu) = -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)w + 2\langle\nabla w, \nabla f\rangle$

以下, $-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)w$, $2\langle\nabla w, \nabla f\rangle$ に $w$の定義を代入してまとめる. $\left(w = \tau(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) + f - n\right)$

**補題4**

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)w = (2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) - \tau\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) - \left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)(f)$$

代入するだけで出る.

2012/1/24

⑧

**補題5** $\quad 2\langle \nabla w, \nabla u\rangle = 2\tau\langle \nabla(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R), \nabla f\rangle + 2|\nabla f|^2$

代入するだけで出る。

命題3、4、5より

**命題6** $\quad u^{-1}\square^*(wu) = 2\Delta f + |\nabla f|^2 + R - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta f\right) - \tau P$

**定義7** 
$$P \underset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) - 2\langle \nabla(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R), \nabla f\rangle$$

以下の目標

**命題8** $\quad P = 2|Ric|^2 + 4\langle Ric, \nabla\nabla f\rangle + 2|\nabla\nabla f|^2$

**補題9** (よく知られた結果、Hamilton '82)

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}, \quad t \in [0, T)$$

スカラー曲率 $R_{g(t)}$ は次をみたす。

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|Ric|^2$$

☆

(説明) Hamilton '82

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} = \Delta R_{ij} + 2 g^{pl} g^{qm} R_{pijq} R_{lm} - 2 g^{pq} R_{pi} R_{qj}$$

($= \Delta_L Ric$, リヒネロビッツ ラプラシアン)

2012/1/24

9

☆ $R = g^{ij} R_{ij}$ であるので

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij} R_{ij}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij}\right)}_{= 2R^{ij}} R_{ij} + g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t} R_{ij}\right)$$

$$= 2|Ric|^2 + g^{ij}\left(\Delta R_{ij} \boxed{+ 2 g^{pl} g^{qm} R_{pijq} R_{lm} - 2 g^{pq} R_{pi} R_{qj}}\right)$$

$$\Delta g^{ij} R_{ij} = \Delta R$$

レポート
ここが0になることを示して下さい.