2012/1/26

①

石田先生(上智大)

集中講義

3. W-entropy (Perelman)

__定義 18.__ ($\mathcal{W}$-entropy)

$$\mathcal{W} : \mathcal{R} \times C^\infty(M) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(g, f, \tau) \longmapsto \mathcal{W}(g, f, \tau)$$

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int \left[\tau (R + |\nabla f|^2) + f - n \right] u \, d\mu_g$$

ここで, $u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f}$ とする.

$$w := \left[\tau (2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) + f - n \right]$$

(Harnack quantity)

__命題 19__

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int_M w u \, d\mu$$

__証明__

補題 13 より $\Delta(e^{-f}) = (-\Delta f + |\nabla f|^2) e^{-f}$ が成立している.

したがって

$$\Delta u = (-\Delta f + |\nabla f|^2) u$$

が成り立つ. つまり

$$(\Delta f) u = -\Delta u + |\nabla f|^2 u$$

$$wu = \left[\tau (2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) + f - n \right] u$$

$$= \tau (2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) u + (f - n) u$$

$$= 2\tau (\Delta f) u - \tau |\nabla f|^2 u + \tau R u + (f - n) \tau$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\tau(-\Delta u + |\nabla f|^2 u) - \tau|\nabla f|^2 u + \tau R u + (f-n)u \\
&= -2\tau\Delta u + 2\tau|\nabla f|^2 u - \tau|\nabla f|^2 u + \tau R u + (f-n)u \\
&= \left[\tau(R+|\nabla f|^2) + f - n\right]u - 2\tau\Delta u
\end{aligned}
$$

これより

$$
\int_M w u \, d\mu = \int_M \left[\tau(R+|\nabla f|^2) + f - n\right] u \, d\mu - 2\tau \underbrace{\int_M \Delta u \, d\mu}_{\substack{= 0 \\ \text{divergence theorem}}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left[\tau(R+|\nabla f|^2) + f - n\right] u \, d\mu \\
&= W(g, f, \tau) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

定理20 (Monotonicity formula for W-entropy) 単調性公式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij} & \text{リッチフロー} \\
\Box^* u = \left(-\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta + R\right) u = 0 & \\
\dfrac{\partial \tau}{\partial t} = -1, \quad \tau(t) > 0, & u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} \text{ と } f \text{ を定義する.}
\end{cases}
$$

$$
\frac{d}{dt} W(g(t), f(t), \tau(t)) = 2\tau \int_M \underbrace{\left|Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau}\right|^2}_{\text{定理Aで出てきた量}} u \, d\mu \geq 0.
$$

定理21 (有名公式)

スカラー曲率

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} \\
&\frac{\partial}{\partial t}(d\mu) = -R \, d\mu \\
&\left(d\mu = \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\right)
\end{aligned}
$$

2012/1/26
③

証明（定理20）

命題19より

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int_M wu \, d\mu$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}(g, f, \tau) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_M wu \, d\mu \\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial t}(wu) d\mu + (wu)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} d\mu}_{= -R d\mu} \\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial t}(wu) \, d\mu - R(wu) d\mu \\
&= \int_M \left(\frac{\partial}{\partial t} - R\right) wu \, d\mu
\end{aligned}$$

一方，$\Box^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + R$ なので $\frac{\partial}{\partial t} - R = -\Box^* - \Delta$

これを代入して

$$\begin{aligned}
&= \int_M (-\Box^* - \Delta)(wu) \, d\mu \\
&= -\int_M \Box^*(wu) d\mu - \underbrace{\int_M \Delta(wu) d\mu}_{= 0} \\
&= -\int_M \Box^*(wu) \, d\mu \\
&= 2\tau \int_M \left| Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau}\right|^2 u \, d\mu \geq 0
\end{aligned}$$

定理A

$$\Box^*(wu) = -2\tau \left| Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau}\right|^2 u.$$

∎

㊟ $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}(g, f, \tau) = 2\tau \int_M \left| Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau}\right|^2 d\mu$ の

証明方法は 上記以外にも あと 2つある.

2012/1/26
④

(1) $\mathcal{W}$-entropy の第一変分を直接計算する方法
(2) $\mathcal{F}$-entropy $\mathcal{F}(g,f) := \int (R + |\nabla f|^2) e^{-f} d\mu$ の単調性を経由して証明する方法.

4. μ-不変量

$$\mathcal{X} \underset{\text{定義}}{=} \left\{ (g,f,\tau) \in \mathcal{R}_M \times C^\infty(M) \times \mathbb{R}^+ \,\middle|\, \int_M u\, d\mu = 1 \right\}, \quad u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f}$$

定義22 (μ-不変量)

$$\mu(g,\tau) := \inf_{f \in C^\infty(M)} \left\{ \mathcal{W}(g,f,\tau) \,\middle|\, (g,f,\tau) \in \mathcal{X} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \mu : \mathcal{R}_M \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (g,\tau) & \longmapsto & \mu(g,\tau) \end{array} \right)$$

注 $\mathcal{W}$-entropy の性質

レポート問題
(1) Scale invariance

$$\mathcal{W}(cg, f, c\tau) = \mathcal{W}(g, f, \tau)$$

(2) Diffeomorphism invariance

$\Phi : M \longrightarrow M$: Diffeo

$$\mathcal{W}(\Phi^* g, \Phi^* f, \tau) = \mathcal{W}(g, f, \tau)$$

この性質より μ-不変量は次をみたす.

$$\begin{cases} (1) & \mu(cg, c\tau) = \mu(g,\tau) \\ (2) & \mu(\Phi^* g, \tau) = \mu(g,\tau) \end{cases}$$

2012/1/26

5

補題23

$(g, f, \tau) \in \mathcal{X}, \quad w = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{f}{2}} \quad \left(w^2 = u, \int w^2 d\mu = \int u\, d\mu = 1 \right)$

このとき次が成り立つ.

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) \geq \int \tau \left(4|\nabla w|^2 - 2w^2 \log w \right) d\mu + \tau R_{min}$$
$$- \left(\frac{n}{2} \log(4\pi\tau) + n \right)$$

R_{min}: Mとのスカラー曲率の最小値.

証明 $w = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{f}{2}}$ なので

$$\log w = -\frac{n}{4} \log(4\pi\tau) - \frac{f}{2}$$

つまり $f = -2 \log w - \frac{n}{2} \log(4\pi\tau)$

$\nabla f = -2 \frac{\nabla w}{w}$ なので

$|\nabla f|^2 = 4 \frac{|\nabla w|^2}{w^2}$ となる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(g, f, \tau) &= \int_M \left[\tau (R + |\nabla f|^2) + f - n \right] u\, d\mu \\
&= \int_M \tau \left(R + 4\frac{|\nabla w|^2}{w^2} \right) - 2 \log w - \frac{n}{2} \log(4\pi\tau) - n \Big] w^2 d\mu \\
&= \int_M \tau R w^2 + 4\tau |\nabla w|^2 - 2w^2 \log w - \left(\frac{n}{2} \log(4\pi\tau) + n \right) w^2 d\mu \\
&= \int_M \left(4\tau |\nabla w|^2 - 2w^2 \log w \right) d\mu + \tau \int_M \underbrace{R}_{\geq R_{min}} w^2 d\mu \\
&\quad - \left(\frac{n}{2} \log(4\pi\tau) + n \right) \underbrace{\int w^2 d\mu}_{=1} \\
&\geq \int_M \left(4\tau |\nabla w|^2 - 2w^2 \log w \right) d\mu + \tau R_{min} \underbrace{\int w^2 d\mu}_{=1} \\
&\quad - \left(\frac{n}{2} \log(4\pi\tau) + n \right)
\end{aligned}$$

2012/1/26

6

$$= \underbrace{\int_M \left(4\tau|\nabla w|^2 - 2w^2\log w\right) d\mu}_{} + \tau R_{min} - \left(\frac{n}{2}\log(4\pi\tau) + n\right) \quad \boxtimes$$

ここの有限性がほしい.

定理24 (Log Sobolev 不等式)

(M^n, g) : 閉リーマン多様体 $(n \geq 2)$

任意の a に対して, 次をみたす定数 $C(a,g)$ が存在する:

$\varphi > 0$, $\int \varphi^2 d\mu = 1$ に対して

$$\int_M \varphi^2 \log\varphi \, d\mu \leqq a\int |\nabla\varphi|^2 d\mu + C(a,g)$$

命題25

$$\mathcal{W}(g,f,\tau) \geq \tau R_{min} - 2C(2\tau, g) - \frac{n}{2}\log(4\pi\tau) - n$$

とくに $\mu(g,\tau) > -\infty$

証明

定理24において $\varphi = w$, $c = 2\tau$ とすると

$$\int w^2 \log w \, d\mu \leq 2\tau\int |\nabla w|^2 d\mu + C(2\tau, g)$$

つまり, $\int \left(4\tau|\nabla w|^2 - 2w^2\log w\right) d\mu \geq -2C(2\tau, g)$

が成り立つので、命題23と上の不等式より主張が従う. $\boxtimes$

さらに次が知られている。

定理26 (Rothaus '81) Logarithmic Sobolev inequality and the spectrum of Schrödinger operator

(M, g) 閉リーマン多様体

任意の $\tau > 0$ と任意のリーマン計量 g に対して

$\chi = \{(g, f, \tau) \mid \int u \, d\mu = 1\}$ の $W(g, \cdot, \tau)$ の minimizer f_τ が存在する。つまり

$$\mu(g, \tau) = W(g, f_\tau, \tau)$$

が成り立つ。

定理27 (μ-不変量の単調性)

M : 閉多様体

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$ $t \in [0, T)$ リッチフロー

$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -1$, $\tau(t) > 0$.

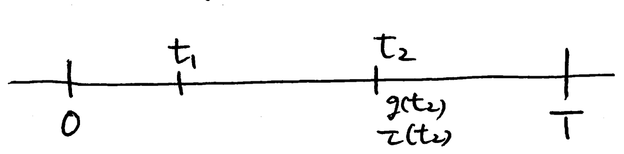
このとき $0 \le {}^\forall t_1 \le {}^\forall t_2 \le T$ に対して

$$\mu(g(t_1), \tau(t_1)) \le \mu(g(t_2), \tau(t_2))$$ (単調非減少)

証明

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1.$$

をみたす $(g(t), \tau(t))$ をとる, $t \in [0, T)$



2012/1/26
8

このとき、Rothausの定理より

$$\mu(g(t_2), \tau(t_2)) = \mathcal{W}(g(t_2), f_{t_2}, \tau(t_2))$$

をみたす f_{t_2} が存在する。

この f_{t_2} を初期値として、次の微分方程式を解く。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau}$$

（これは補題14より $\square^* u = 0$）。つまり今

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1 \\ \square^* u = 0 \end{cases}$$

という系で考えている。

定理20（W-entropyの単調性）より

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t)) \geq 0, \quad t \in [0, T)$$

これより

$$\underset{\mu(g(t_1), \tau(t_1))}{\underset{\mathbin{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{\mathcal{W}(g(t_1), f(t_1), \tau(t_1))}} \leq \underset{\mu(g(t_2), f(t_2))}{\underset{\parallel}{\mathcal{W}(g(t_2), f_{t_2}, \tau(t_2))}}$$

したがって $\mu(g(t_1), \tau(t_1)) \leq \mu(g(t_2), \tau(t_2))$ が成り立つ。 ∎

応用1　No Local Collapsing Thm　（非局所崩壊定理）

2.　No Breather Theorem I, II

2012/1/26
⑨

Ricci Breather (リッチブリーザー)

$\exists t_1 < t_2,\ \exists \alpha > 0,\ \exists \Phi : M \to M$
(diffeo)

s.t. $g(t_2) = \alpha \Phi^* g(t_1)$

(Ricci soliton = trivial Ricci Breather)

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = -2R_{ij} = \Delta + Q$$

$\alpha > 1$ ... expanding
$\alpha = 1$ ... steady
$\alpha < 1$ ... shrinking.

定理 (Perelman)

M: 閉多様体.

(1) Shrinking Ricci Breather は gradient shrinking Ricci soliton.

$$Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W = 2\tau \int \left| Ric + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau} \right|^2 u \, d\mu.$$

(2) Expanding or Steady Ricci Breather は Einstein.

$$\alpha g_{ij} = R_{ij}$$

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} d\mu.$$