2012/1/27

①

石田先生（上智大）
集中講義

レポート

授業の感想，有益であった点などを書け．

＋ 問題を少なくとも1つ．

---

5. No Local Collapsing Theorem (Perelman)

定理28

M^n：閉リーマン多様体

$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$, $t \in [0, T)$, $T < \infty$.

$\rho \in (0, \infty)$　　　$g(0)$：初期計量

このとき，以下をみたす定数

$$K = K(n, g(0), \rho, T)$$

が存在する：

もし $p \in M$, $t \in [0, T)$, $r \in (0, \rho]$ に対して

$R_{g(t)} \leq \frac{1}{r^2}$ on $B_{g(t)}(p, r)$ であれば，次が成り立つ：

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_{g(t)}(p, s))}{s^n} \geq K = K(n, g(0), \rho, T)$$

ここで $0 < {}^\forall s \leq r$.

(P. Topping (2005)
"Diameter Control under Ricci flow"
Comm. Anal. Geom. 13.
($|Rm| \leq \frac{1}{r^2}$ (Perelman)))

証明の方針

- $\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int [\tau(R + |\nabla f|^2) + f - n] u \, d\mu$.

$$u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f}$$

一般のリーマン多様体に対して定義される

2022/1/27
②

• μ-不変量

$$\mathcal{X} = \{ (g, f, \tau) \mid \int u \, d\mu = 1 \}$$

$$\mu(g, \tau) = \inf_{f \in C^\infty(M)} \{ W(g, f, \tau) \mid (g, f, \tau) \in \mathcal{X} \}$$

↑
一般のリーマン多様体に対して定義される.

Step 1

命題29

(M^n, g) : 閉リーマン多様体

$\forall p \in M$, $\forall r > 0$ に対して次が成り立つ.

$$\mu(g, r^2) \leq \log\left(\frac{\mathrm{Vol}(B_g(p,r))}{r^n} \right) + \left(36 + \frac{s^2 \int_{B_g(p,r)} R \, d\mu}{\mathrm{Vol}\ B_g(p,r)} \right) \frac{\mathrm{Vol}\, B_g(p,r)}{\mathrm{Vol}\, B_g(p, \frac{r}{2})}$$

$$W(g, f, \tau) = \int [\tau(R + |\nabla f|^2) + f - n] u \, d\mu$$

↑
このfをうまく取ってギロンする.

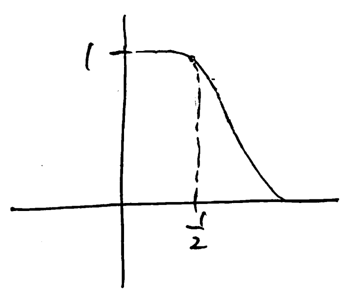
$$f(x) = C - \log\left(\Phi\left(\frac{d_g(x,p)}{r} \right) \right)^2 \quad (x, p \in M)$$

↑
定数

Cutoff function

$$\Phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$\begin{cases} \Phi(x) = 1 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ \Phi(x) = 0 & (1 \leq x) \\ |\nabla \Phi| \leq 3 & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$



$w = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{f}{2}}$ とするとき, $\int_M w^2 d\mu = 1$ であるように定数Cをとる.

2012/1/27
③

このfを使って次がわかる.

補題30

次が成り立つ.

(1) $4r^2\int|\nabla w|^2 d\mu \le 36\dfrac{\mathrm{Vol}\,B(p,r)}{\mathrm{Vol}\,B(p,\frac{r}{2})}$ ← めんどう.

(2) $r^2\int Rw^2 d\mu \le \dfrac{r^2}{\mathrm{Vol}\,B(p,\frac{r}{2})}\int_{B(p,r)} R\,d\mu$

(3) $\int fw^2 d\mu \le \log\left(\dfrac{\mathrm{Vol}\,B(p,r)}{r^2}\right)$

直接的な計算

Jensen不等式

$\int w^2\log w^2 d\mu \ge -\log \mathrm{Vol}(B(p,r))$

補題31

$$\mu(g,r^2) \le \int(\underbrace{4r^2|\nabla w|^2}_{(1)} + \underbrace{r^2Rw}_{(2)} + \underbrace{fw^2}_{(3)})\,d\mu$$

説明 $W(g,f,r^2) = \int[r^2(R+|\nabla f|^2)+f-n]\,u\,d\mu$

$w=(4\pi r^2)^{-\frac{n}{4}}e^{-\frac{f}{2}} \Rightarrow u=w^2$

$\Downarrow \log$

$f=-2\log w-\frac{n}{2}\log(4\pi r^2) \Longrightarrow |\nabla f|^2 = 4\dfrac{|\nabla w|^2}{w^2}$

Step 2

命題29より $0<\forall s\le r$ に対して

$$\frac{s^2\int R\,d\mu}{\mathrm{Vol}\,B(p,s)}$$
$$\shortparallel$$

$$\mu(g,s^2) \le \log\left(\frac{\mathrm{Vol}\,B(p,s)}{s^n}\right) + \left(36 + s^2\int_{B(p,s)} R\,d\mu\right)\frac{\mathrm{Vol}\,B(p,s)}{\mathrm{Vol}\,B(p,\frac{s}{2})}$$

2012/1/27
④

$$\log\left(\frac{\mathrm{Vol}\,B(p,s)}{s^n}\right) \geq \mu(g,s^2) - \left(36 + s^2 \int_{B(p,s)} R\,d\mu\right) \frac{\mathrm{Vol}\,B(p,s)}{\mathrm{Vol}\,B(p,\frac{s}{2})}$$

$\Downarrow$ exp

$$\underbrace{\frac{\mathrm{Vol}\,B(p,s)}{s^n}} \geq e^{\mu(g,s^2)} \exp\left\{-\left(36 + s^2 \int_{B(p,s)} R\,d\mu\right) \underbrace{\frac{\mathrm{Vol}\,B(p,s)}{\mathrm{Vol}\,B(p,\frac{s}{2})}}\right\}$$

NLCの左辺のようなもの

ここをさらに評価する必要がある

$$\begin{cases} A_\mu(g,r^2) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\limits_{\tau \in [0,r^2]} \mu(g,\tau) \\ D_R(g,r) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{0<s\leq r} s^2 \int_{B(p,s)} R\,d\mu \end{cases}$$

$\Downarrow$

定理32 （一般のリーマン多様体に対して成立）

(M^n, g) 閉リーマン多様体

$0 < {}^\forall s \leq r$ に対して

$$\frac{\mathrm{Vol}\,B_g(p,s)}{s^n} \geq e^{A_\mu(g,r^2)} \exp\left\{-(36 + D_R(g,r))\,3^n\right\}$$

Step 3 定理32と μ-不変量の単調性

$$D_R(g,r) = \sup_{0<s<r} s^2 \int_{B(p,s)} R\,d\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

$$\frac{\mathrm{Vol}\,B_{g(t)}(p,s)}{s^n} \geq e^{A_\mu(g(t),r^2)} \exp\left\{-(36 + \underbrace{D_R(g(t),r)})\,3^n\right\}$$

$R \leq \frac{1}{r^2}$ on $B_{g(t)}(p,r)$ より
1でおきかえてもよい

$$\geq e^{A_\mu(g(t),r^2)} \exp\left\{-37 \cdot 3^n\right\}$$

2012/1/27

5

$$\geq e^{A\mu(g(0),\ \rho^2+T)} \exp\{-3^n \cdot 37\} = \kappa.$$

単調性 $(0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T)$

$\mu(g(t_1), \tau(t_1)) \leq \mu(g(t_2), \tau(t_2))$

$\mu(g(0), r^2+t) \leq \mu(g(t), r^2) \quad r>0,\ t \in [0, T)$