2012/1/31 2階の微分作用素のcommutantsについて

①

木幡先生(九大)
トポロジー・幾何学セミナー

§0. Intro

$$O(2n,2) := \left\{ g \in GL(2n+2,\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t g \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$G := SO_0(2n,2) = O(2n,2) \cap SL(2n+2,\mathbb{R})$ の e を含む連結成分

$(\pi, L^2(\mathbb{R}^{2n-1}, |x|^{-1}dx))$: Kobayashi − Ørsted によって構成されたO(2n,2)の Schrödinger model
(=非退化主系列表現の波動方程式の解空間に制限して得られる表現をフーリエ変換でコーン上の関数空間に実現された表現)の $SO_0(2n,2)$ に制限して得られる表現.

H を G の部分群とする.

$$\mathcal{D}^H := \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n-1}\setminus\{0\})^H := \left\{ D \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n-1}\setminus\{0\}) \;\middle|\; D\circ\pi(h) = \pi(h)\circ D \quad {}^\forall h \in H \right\}$$

H-不変微分作用素環

㊟ G の表現 π が H に関して multiplicity free

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi|_H$ を H の既約分解, H の既約成分 $\underset{\text{重複度}}{\wedge}$ 1以下.

このとき $\mathcal{D}^H$ は可換環
(Schurの補題による)

その後 Kobayashi − Mano : この表現のスペクトル解析

$$|x|\left(\frac{1}{4}\Delta - 1\right), \quad \Delta = \sum_{1\le i\le 2n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$$

を用いて計算されている.

2012/1/31
②

Hが次の部分群のとき計算.

$$\begin{cases} K = SO(2n) \times SO(2) & (\text{極大コンパクト群}) \\ K_1 = I_1 \times SO(2n-1) \times SO(2) \\ K_2 = SO(2) \times SO(2n-2) \times SO(2) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & K & \\ K_1 \arrow[ur, phantom, "\subset"] & & K_2 \arrow[ul, phantom, "\supset"] \\ & K_1 \cap K_2 \arrow[ul, phantom, "\cup"] & U \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{D}^K & \\ \mathcal{D}^{K_1} \arrow[ur, phantom, "\supset"] & & \mathcal{D}^{K_2} \arrow[ul, phantom, "\subset"] \\ & \mathcal{D}^{K_1 \cap K_2} \arrow[u, phantom, "\supset"] & \end{tikzcd}$$

(非可換)

K, K_1, K_2 は multiplicity free.

$U = U(1) \times U(n-1) \times U(1)$

結果: $\mathcal{D}^{K_1}$, $\mathcal{D}^{K_2}$ は互いに可換な代数的独立なそれぞれ2コと3コの元で生成される多項式環となる. 更に

$$\mathcal{D}^K = \mathbb{C}\left[\underline{|x|\left(\tfrac{1}{4}\Delta - 1\right)}\right]$$

となる.

証明　群 $R := I_1 \times SO(2n-1) \times I_2$ が $\mathbb{R}^{2n-1} \setminus \{0\}$ に普通の回転群の作用している.

$$\mathbb{R}^{2n-1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^+ \times S^{2n-2}$$

$$A + r^{-1} \Delta_{S^{2n-2}}$$

$$A = r\partial^2 + (2n-2)\partial - 4r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$$

$$\partial = \frac{\partial}{\partial r}$$

2012/1/31
③

少し一般化　$A := r\partial^2 + a\partial + b$　(a, b : 定数)

$$Z_A = \{ P \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+) \mid PA = AP \}$$ とする.

結果：　$b \neq 0$ のとき　$Z_A = \mathbb{C}[A] = \{ Q(A) \mid Q \in \mathbb{C}[t] \}$

しかし, 例

$b = 0,\ a = \frac{3}{2}$ のとき　$Z_A = \mathbb{C}[B],\quad B = r^{\frac{1}{2}}\partial + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}}$

$B^2 = A$　　$= \mathbb{C}[A] \oplus \mathbb{C}[A]B.$

§1. Commutants.

U : $\mathbb{R}$の開集合

$\mathcal{D} := \mathcal{D}(U)$　微分作用素環

交換子　$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$

(例　$[\partial, x] = 1,\quad [\partial, f] = \partial(f),\quad [\partial^2, f] = 2\partial(f)\partial + \partial^2(f)$)

記号：　$\mathcal{D}^m := \{ D \in \mathcal{D} \mid O(D) \leq m \}$

$\mathcal{D}^{even} := \{ D \in \mathcal{D} \mid O(D) : \text{even} \}$

$\mathcal{D}^{odd} := \{ D \in \mathcal{D} \mid O(D) : \text{odd} \}$

定理1　Z_A は $\mathbb{C}[A]$ 加群として高々2コの元で生成される可換環

$A := \partial^2 + a\partial + b,\quad a, b \in C^\infty(U)$

2012/1/31

4

命題

(1) $Z_A \cap \mathcal{D}^{odd} = \phi \implies Z_A = \mathbb{C}[A]$ Type I

(2) $Z_A \cap \mathcal{D}^{odd} \neq \phi \implies \exists l \in \mathbb{N},\ \exists B \in \mathcal{D}^{2l-1}$ s.t.
Type II

① $[A, B] = 0$

② $B = \partial^{2l-1} + (\text{lower})$

③ $Z_A = \mathbb{C}[A] \oplus \mathbb{C}[A]B$.

例 (0) $A = \partial^2$ $\quad Z_A = \mathbb{C}[\partial] = \mathbb{C}[A] \oplus \mathbb{C}[A]\partial$

(1) $A = \partial^2 + \frac{1}{r}\partial - \frac{1}{4r^2}$ $\quad B := \partial + \frac{1}{2r}$ $\quad (B^2 = A)$

$Z_A = \mathbb{C}[B] = \mathbb{C}[A] \oplus \mathbb{C}[A]B$.

(2) $A = \partial^2 - \frac{2}{r^2}$, $\quad B = \partial^3 - \frac{3}{r^2}\partial + \frac{3}{r^3}$ $\quad (B^2 = A^3)$

$Z_A = \mathbb{C}[A] \oplus \mathbb{C}[A]B$

§2. Deformations $(A = \partial^2 + a\partial + b)$

Obv. $A^n = \partial^{2n} + \sum_{1 \le j \le 2n} F_j(2n : a, b)\, \partial^{2n-j}$

$F_j(2n : a, b) = F_j(2n)$

$\downarrow$

$A^{n+1} = (\partial^2 + a\partial + b)\,(\qquad\qquad)$

$F_j(2n+2) - F_j(2n) = A_1 F_{j-1}(2n) + A F_{j-2}(2n)$

$A_1 = 2\partial + a$

$F_n(t) \in \mathbb{C}[t]^n \otimes \mathbb{C}[a, a^{(1)}, \cdots, a^{(n)}, b, b^{(1)}, \cdots, b^{(n)}]$

を次の式で定義する

2012/1/31
5

$F_0(t)=1,\quad F_1(t)=\frac{at}{2},\quad F_n(0)=0\ (n\geq 1)$

$F_n(t+2)-F_n(t)=A_1F_{n-1}(t)+AF_{n-2}(t)$

uniqueに t の n 次 poly $F_n(t)$ が決まる.

定義: $P_0=1,\ P_m=\partial^m+\sum_{1\leq j\leq m}F_j(m)\partial^{m-j}$ と定める.

$\left(P_1=\partial+\frac{a}{2},\ P_2=A,\ P_3=\partial^3+\frac{3}{2}a\partial^2+\cdots\right)$

命題2.1 $P_{2n}=A^n$

$[P_m,A]=\sum_{0\leq l\leq m-1}\Phi_l(m)\partial^{m-l}+\Phi_m(m)+2\partial F_{m+1}(m)$

$\Phi_l(t)=\sum_{1\leq k\leq n+1}Q(t,n-k+1,n)\,F_{n-k+1}(t)\,a^{(k)}$

$+\sum\cdots$

$\Phi_l=0,\quad [P_{2n},A]=0$ より

$\forall n\in\mathbb{N},\ 1\leq\forall l\leq 2n,\ \Phi_l(2n)=0\quad (F_{2n+1}(2n)=0)$

$\forall l\in\{0,1,\cdots,\}$ fix $P_l=\{2n\mid 2n\geq l,\ n\in\mathbb{N}\}$

$|\Phi_l|_{P_l}=0.$

命題2.2 $[P_{2n-1},A]=2\partial F_{2n}(2n-1)\in\mathcal{D}^0$

$\nu:\mathcal{D}\ni P\longmapsto[P,A]\in\mathcal{D}$

命題2.3 $\nu^{-1}(\mathcal{D}^0)\cap\mathcal{D}^m=\langle P_0,P_1,\cdots,P_m\rangle_{\mathbb{C}}=:V_m$

2012/1/31

⑥

$n \in \mathbb{N}$ に対して 関数 $g_n := [P_{2n-1}, A]$ とする

命題2.4

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{g_1, \cdots, g_n\}$ が $\mathbb{C}$ 上1次独立

$\Longrightarrow Z_A \cap \mathcal{D}^{odd} = \phi$

(2) $\exists l \in \mathbb{N}$, $\{g_1, \cdots, g_l\}$: 一次独立

$\{g_1, \cdots, g_{l+1}\}$: 一次従属

$\Longrightarrow Z_A \cap \mathcal{D}^{odd} \neq \phi$ $\left(\begin{array}{l} g_{l+1} = c_1 g_1 + \cdots + c_l g_l \\ B := P_{2l+1} - (c_1 P_1 + \cdots + c_l P_l) \end{array} \right)$

$\mathcal{R}_1 := \{(a,b) \mid g_1(a,b) = 0\}$

$l \geq 2$

$\mathcal{R}_l := \left\{ (a,b) \;\middle|\; \begin{array}{l} \{g_1, \cdots, g_{l-1}\} \text{ が } \mathbb{C} \text{ 上一次独立} \\ \{g_1, \cdots, g_l\} \text{ が } \mathbb{C} \text{ 上一次従属} \end{array} \right\}$

$\mathcal{P} := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_l$

定理2 微分作用素 $A = \partial^2 + a(x)\partial + b(x)$ に対し,

$Z_A = \mathbb{C}[A] \iff (a,b) \notin \mathcal{P}$

generic

$g_1(a,b) = \partial(b) - \frac{1}{2}\partial^2(a) - \frac{1}{4}\partial(a^2)$

(0) $A = \partial^2$, $a = b = 0$ のとき $g_1 = 0$ $(a,b) \in \mathcal{P}_1$

(1) $a = r^{-1}$, $b = -\frac{1}{4}r^{-2}$ $g_1 = 0$ $(a,b) \in \mathcal{P}_1$

(2) $a = 0$, $b = -2r^{-2}$ $g_1 = 4r^{-3}$, $g_2 = 0$ $(a,b) \in \mathcal{P}_2$.