

2つのエンドをもつ極小曲面の全曲率について

福岡教育大学 藤森 祥一 (Shoichi Fujimori)
Fukuoka University of Education

概要

3次元 Euclid 空間内の完備かつ有限全曲率をもつ極小曲面は Osserman 不等式と呼ばれる不等式をみたすことが知られている. 3つ以上のエンドをもつ極小曲面で Osserman 不等式の等号をみたす例は多く知られているが, 2つのエンドをもつ極小曲面で等号をみたすものは懸垂面に限られることが知られている. 本稿では, 2つのエンドをもつ極小曲面とその全曲率について考察する.

1. 背景

M を Riemann 面, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を共形極小はめ込みとする. f が完備かつ有限全曲率をもつとき, f は代数的極小曲面と呼ばれる.

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を代数的極小曲面とする. このとき, M は種数 γ ($\gamma \geq 0$) のコンパクト Riemann 面 \overline{M}_γ から有限個の点 $\{p_1, \dots, p_n\}$ ($n \geq 1$) を取り除いたものと共形同値である ([H]). 以下, 本稿では特に断らない限り,

$$M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \quad (\gamma = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots)$$

とする. 除いた点 p_1, \dots, p_n は曲面のエンドに対応する.

代数的極小曲面に対して, 次の表現公式が知られている.

定理 1.1 (Weierstrass の表現公式 [O]). $M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ 上の有理型関数 g と正則 1 形式 η を,

$$(1.1) \quad (1 + |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}$$

が M 上の完備 Riemann 計量を定めるようにとる.

$$\Phi := {}^t((1 - g^2)\eta, i(1 + g^2)\eta, 2g\eta)$$

とおく. このとき,

$$(P) \quad \text{任意の } \ell \in \pi_1(M) \text{ に対して } \operatorname{Re} \oint_\ell \Phi = 0$$

が成り立つならば,

$$(1.2) \quad f = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (z_0 \in M)$$

本稿の内容は, 庄田敏宏氏 (佐賀大学) との共同研究の成果による.

は代数的極小曲面を定める. さらに g, η は \overline{M}_γ 上に有理型に拡張される.

注意 1.2. 条件 (P) を, 曲面の周期条件という. これは

$$(1.3) \quad \oint_\ell \eta = \overline{\oint_\ell g^2 \eta}$$

かつ

$$(1.4) \quad \operatorname{Re} \oint_\ell g \eta = 0$$

が任意の $\ell \in \pi_1(M)$ に対して成り立つことと同値である.

(1.2) で与えられる曲面の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 \mathbb{II} はそれぞれ

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}, \quad \mathbb{II} = -\eta dg - \overline{\eta dg}$$

で与えられる. さらに, $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は曲面の Gauss 写像 $G : M \rightarrow S^2$ と立体射影 $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の合成写像に一致する:

$$g = \sigma \circ G.$$

このことから, 以下 g を曲面の Gauss 写像と見なすことにする. g は \overline{M}_γ 上の有理型関数, 即ちコンパクト Riemann 面 \overline{M}_γ からコンパクト Riemann 面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への正則写像であるから, g の写像度 $\deg(g)$ が定義できる.

代数的極小曲面の全曲率は以下の不等式をみたすことが知られている.

定理 1.3 (Osserman 不等式, [O, JM, Sc]). $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を代数的極小曲面とする. M の Gauss 曲率, 面積要素をそれぞれ K, dA とする. このとき,

$$(1.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_M K dA \leq \chi(M) - n = \chi(\overline{M}) - 2n = 2(1 - \gamma - n)$$

が成り立つ ([O]). また, 等号が成り立つための必要十分条件は, 各エンドが十分先では自己交叉をもたないことである ([JM, Sc]).

注意 1.4 (全曲率と $\deg(g)$ の関係). 極小曲面の Gauss 曲率 K は非正であるから, M の絶対全曲率を $\tau(M)$ とすると,

$$\tau(M) = \int_M (-K) dA$$

が成り立つ. また, $(-K)ds^2$ は, g による $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の Fubini-Study 計量 (定曲率 +1 の計量) の引き戻しを与えている. 即ち,

$$(-K)ds^2 = \frac{4dg d\bar{g}}{(1 + |g|^2)^2}$$

が成り立つ. よって

$$\tau(M) = 4\pi \deg(g) \in 4\pi\mathbb{Z}$$

であり, Osserman 不等式は

$$(1.6) \quad \deg(g) \geq \gamma + n - 1$$

と書くことができる.

以下, (1.6) を Osserman 不等式と呼ぶことにする. この不等式の等号が成り立つ曲面を考える.

$n \geq 3$, すなわち, 3 つ以上のエンドをもつ極小曲面で, (1.6) の等号を満たす例はたくさん存在する (図 1.1 参照).

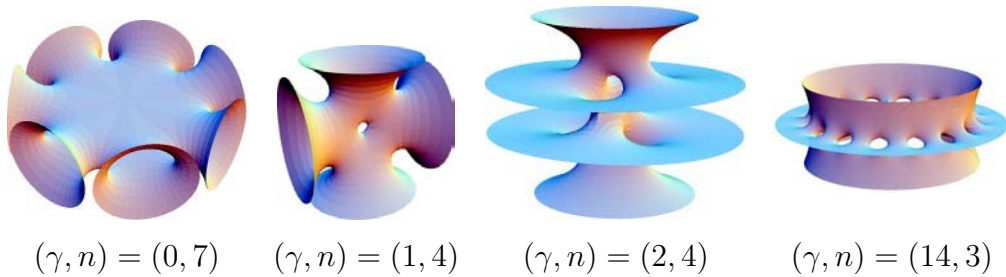


図 1.1. $n \geq 3$ で (1.6) の等号をみたす例. これらの例の詳細については, 左から [JM], [BR], [Wo], [HM]などを参照されたい.

$n = 1$ のとき, (1.6) の等号 $\deg(g) = \gamma$ を満たすものは平面に限られることが知られているが, 任意の種数 γ に対して

$$(1.7) \quad \deg(g) = \gamma + 1$$

を満たす例は佐藤勝憲氏によって構成されている ([Sa, WW], 図 1.2 参照).

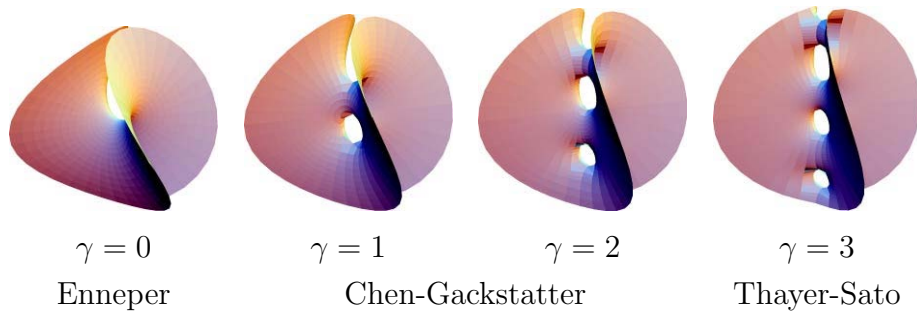


図 1.2. $n = 1$ で (1.7) をみたす例.

以下, $n = 2$, とする. このとき, 次の定理が知られている.

定理 1.5 (Schoen [Sc]). 2 つのエンドをもつ代数的極小曲面 $f : M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, p_2\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ が (1.6) の等号をみたす, すなわち

$$\deg(g) = \gamma + 1$$

が成り立つならば, f は懸垂面である.

よって、懸垂面以外の極小曲面に対しては

$$(1.8) \quad \deg(g) \geq \gamma + 2$$

という不等式が成り立つ。そこで、以下の問題を考える。

問題 1.6. 任意の種数 γ に対して、2つのエンドをもつ代数的極小曲面 $f : M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, p_2\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ で不等式 (1.8) の等号をみたすものは存在するか。

種数 0 のときは、このような曲面の例は知られている。さらに、分類もなされている ([L], 図 1.3 参照)。

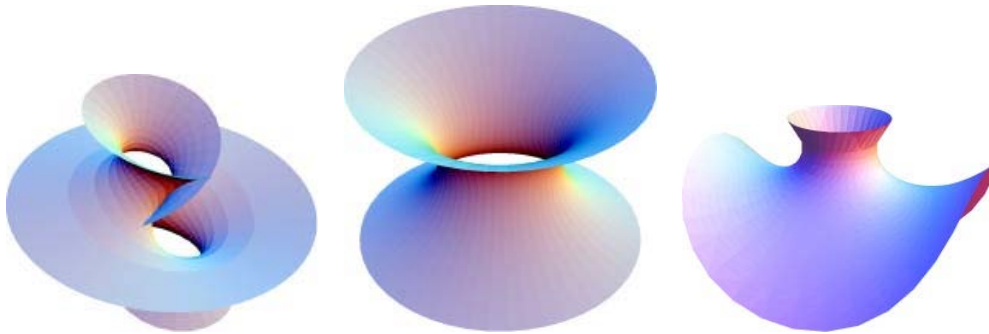


図 1.3. $\gamma = 0$ の例. 中央は懸垂面の 2 重被覆.

しかし、種数が 1 以上のときは、この問題は未解決のようである。この問題に対する部分的な解答として、我々は次の結果を得た。

定理. 種数 γ が 1 または偶数のとき、2つのエンドをもつ代数的極小曲面 $f : M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, p_2\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ で不等式 (1.8) の等号をみたすものが存在する。

次節以降、この具体例を構成する。

2. 種数 1 の例

$$\overline{M} = \overline{M}_1 = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^2 = z(z^2 - 1)\}$$

とおく、 \overline{M} は種数 1 の Riemann 面である。

$$M = \overline{M} \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\}$$

とおく、 $(z, w) = (0, 0)$ と $(z, w) = (\infty, \infty)$ が曲面のエンドに対応する。

$$g = cw \quad (c \in \mathbb{C}), \quad \eta = \frac{dz}{z^2 w}.$$

とおくと、(1.1) は M 上の完備 Riemann 計量を定める (表 2.1 参照)。

ここから (1.2) によって得られる極小曲面が周期条件 (P) をみたすよう、定数 $c \in \mathbb{C}$ の値を定める。

z	0	1	-1	∞
g	0^1	0^1	0^1	∞^3
η	∞^4			0^4

表 2.1. g, η の零と極の位数.

まず, $g\eta = (c/z^2)dz = -c \cdot d(1/z)$ は M 上正則な完全形式であるから, 任意の $\ell \in \pi_1(M)$ に対して

$$\oint_{\ell} g\eta = 0$$

が成り立つ. よって, 任意の $\ell \in \pi_1(M)$ に対して (1.3) が成り立つことを示せばよい. 次の補題は直接計算することにより示すことができる.

補題 2.1 (曲面の対称性). 2 つの共形写像 $\kappa_j : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ ($j = 1, 2$) を次で与える.

$$\kappa_1(z, w) := (\bar{z}, \bar{w}), \quad \kappa_2(z, w) := (-z, iw).$$

このとき, 次が成り立つ.

$$\kappa_1^* \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\Phi}, \quad \kappa_2^* \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi.$$

この補題より, 図 2.1 の ℓ に対して (1.3) を満たす定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在することを示せばよい.

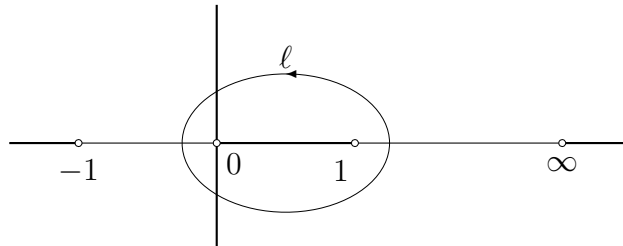


図 2.1. $\ell \in \pi_1(M)$ の z -平面への射影.

$\eta, g^2\eta$ は共に $z = 0$ で極をもつため, このままでは ℓ に沿った積分を実区間 $[0, 1]$ に帰着させることができない. そこで, 次の補題を用意する.

補題 2.2. 次の 2 式が成り立つ.

$$\frac{dz}{z^2 w} - \frac{2}{3} d\left(\frac{w}{z^2}\right) = \frac{dz}{3w}, \quad \frac{w}{z^2} dz + 2d\left(\frac{w}{z}\right) = \frac{2z}{w} dz.$$

よって

$$\oint_{\ell} \eta = \oint_{\ell} \frac{dz}{3w}, \quad \oint_{\ell} g^2 \eta = c^2 \oint_{\ell} \frac{2z}{w} dz$$

であり, また, $(1/3w)dz$ と $(2z/w)dz$ は共に $\overline{M} \setminus \{(\infty, \infty)\}$ 上で正則な 1 形式であるから, ℓ に沿った積分は実区間 $[0, 1]$ の積分に帰着できる. よって, $c \in i\mathbb{R}$ を

$$c^2 = \frac{\overline{\oint_{\ell} \frac{dz}{3w}}}{\oint_{\ell} \frac{2z}{w} dz} = \frac{-\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}}{2 \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t^2}} dt}$$

となるように定めると, (1.3) は満たされ, 従って f は M 上一値になる (図 2.2 参照).

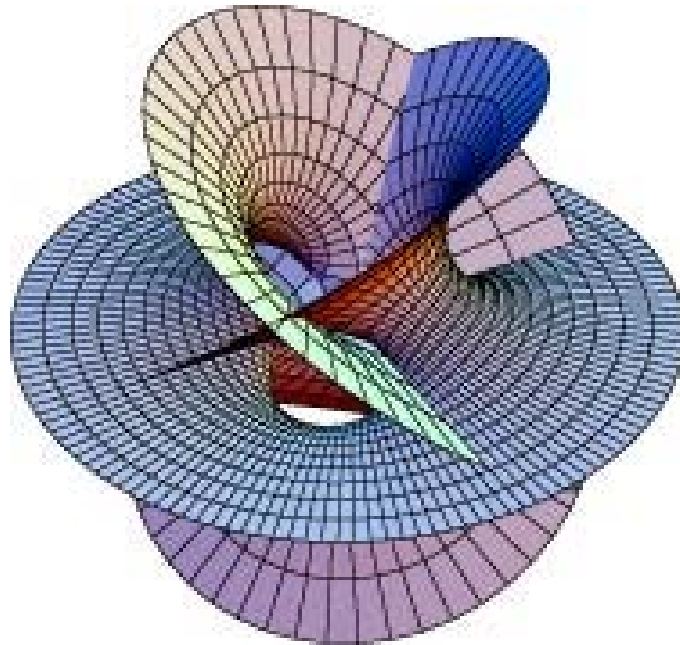


図 2.2. 種数 1 で 2 つのエンドをもつ, $\deg(g) = 3$ の代数的極小曲面.

3. 種数が偶数の例

k を 2 以上の整数とする.

$$\overline{M} = \overline{M}_{\gamma} = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^{k+1} = z^2 \left(\frac{z-1}{z-a} \right)^k \right\} \quad (1 < a < \infty)$$

とおく, Riemann-Hurwitz の公式より,

$$\gamma = \begin{cases} k & (k \text{ が偶数のとき}), \\ k-1 & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ. 種数 γ は常に偶数である (図 3.1 参照).

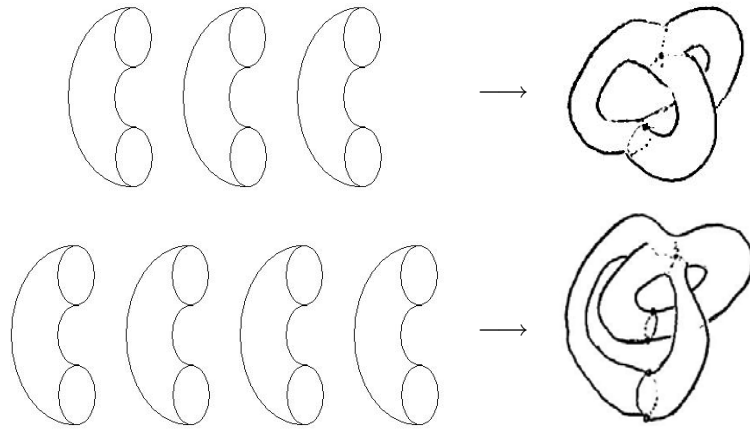


図 3.1. \overline{M} のスケッチ. 上段は $k = 2$ のとき, 下段は $k = 3$ のとき. いずれも種数は 2 になる.

$$M = \overline{M}_\gamma \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\}$$

とおく. $(z, w) = (0, 0)$ と $(z, w) = (\infty, \infty)$ が曲面のエンドに対応する.

$$g = cw, \quad c = a^{(k-2)/(2k+2)} \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \eta = \frac{dz}{z^2 w}.$$

とおくと, (1.1) は M 上の完備 Riemann 計量を定める (表 3.1 参照).

z	0	1	a	∞
g	0^2	0^k	∞^k	∞^2
η	∞^3		0^{2k}	0^1

表 3.1. g, η の零と極の位数.

また, g の写像度は, 各 $k \geq 2$ に対して $k+2$ となる. よって k が偶数ならば, (1.8) の等号が成り立つ. 以下, k を偶数とする. ここから (1.2) によって得られる極小曲面が周期条件 (P) をみたすように, 定数 $a \in (1, \infty)$ の値を定める.

まず, $g\eta = (c/z)dz = c \cdot d(\log z)$ であり, $c \in \mathbb{R}$ であるから, 任意の $\ell \in \pi_1(M)$ に対して

$$\operatorname{Re} \oint_{\ell} g\eta = 0$$

が成り立つ. よって, 任意の $\ell \in \pi_1(M)$ に対して (1.3) が成り立つことを示せばよい. 次の補題は直接計算することにより示すことができる.

補題 3.1 (曲面の対称性). 3つの共形写像 $\kappa_j : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ ($j = 1, 2, 3$) を次で与える.

$$\begin{aligned} \kappa_1(z, w) &= (\bar{z}, \bar{w}), & \kappa_2(z, w) &= (z, e^{2\pi i/(k+1)}w), \\ \kappa_3(z, w) &= \left(\frac{a}{z}, \frac{1}{a^{(k-2)/(k+1)}w} \right). \end{aligned}$$

このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \kappa_1^* \Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\Phi}, & \kappa_2^* \Phi &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k+1} & -\sin \frac{2\pi}{k+1} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{k+1} & \cos \frac{2\pi}{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi, \\ \kappa_3^* \Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi. \end{aligned}$$

この補題より, 図 3.2 の ℓ_1, ℓ_2 に対して (1.3) を満たす定数 $a \in (1, \infty)$ が存在することを示せばよい.

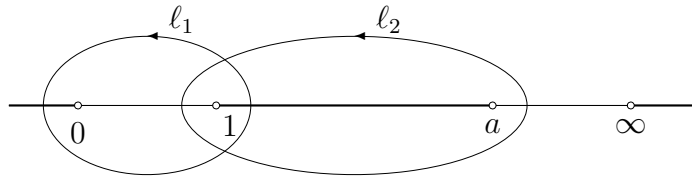


図 3.2. $\ell_1, \ell_2 \in \pi_1(M)$ の z -平面への射影. ただし ℓ_1 は $(k+1)$ 周している閉曲線とする.

最初に ℓ_2 に沿った積分を考える. この場合, $\eta, g^2\eta$ は共に実区間 $[1, a]$ の積分に帰着させることができる.

$$\frac{\oint_{\ell_2} \eta}{\oint_{\ell_2} g^2\eta} = \frac{\oint_{\ell_2} \frac{dz}{zw}}{c^2 \oint_{\ell_2} \frac{w}{z} dz} = \frac{a^{(k-2)/(k+1)}}{c^2}$$

であり, 今 $c^2 = a^{(k-2)/(k+1)}$ であるから, ℓ_2 に対しては (1.3) が成り立つ.

次に ℓ_1 に沿った積分を考える. この場合, η は $z=0$ で極をもつため, このままでは積分を実区間 $[0, 1]$ に帰着させることができない. そこで, 前節と同様に次の補題を用意する.

補題 3.2. 次が成り立つ.

$$\eta - \frac{k+1}{2} d \left(\frac{z-1}{w} \right) = -\frac{k}{2} \frac{z-1}{w(z-a)} dz + \frac{1}{2} \frac{dz}{w}.$$

よって η の ℓ_1 に沿った積分の代わりに

$$\oint_{\ell_1} \left(-\frac{k}{2} \frac{z-1}{w(z-a)} dz + \frac{1}{2} \frac{dz}{w} \right)$$

を考えることにより, ℓ_1 に沿った積分は実区間 $[0, 1]$ の積分に帰着でき, 次の補題を得る.

補題 3.3. $\ell_1 \in \pi_1(M)$ に対して (1.3) が成り立つための必要十分条件は,

$$(3.1) \quad kA_1 + 2a^{(k-2)/(k+1)}A_3 - A_2 = 0$$

が成り立つことである. ただし,

$$A_1 = \int_0^1 \frac{(1-t)^{1/(k+1)}}{t^{2/(k+1)}(a-t)^{1/(k+1)}} dt, \quad A_2 = \int_0^1 \frac{(a-t)^{k/(k+1)}}{t^{2/(k+1)}(1-t)^{k/(k+1)}} dt,$$

$$A_3 = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k/(k+1)}}{t^{(k-1)/(k+1)}(a-t)^{k/(k+1)}} dt.$$

よって (3.1) をみたく $a \in (1, \infty)$ が存在することを示せばよい.

補題 3.4. A_1, A_2, A_3 はベータ関数

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0)$$

を用いて次のように評価できる.

$$\frac{1}{a^{1/(k+1)}} B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1}\right) \leq A_1 \leq \frac{1}{(a-1)^{1/(k+1)}} B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1}\right),$$

$$(a-1)^{k/(k+1)} B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right) \leq A_2 \leq a^{k/(k+1)} B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right),$$

$$\frac{1}{a^{k/(k+1)}} B\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k+1}{k+1}\right) \leq A_3 \leq \frac{1}{(a-1)^{k/(k+1)}} B\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k+1}{k+1}\right).$$

この補題より, $a \rightarrow \infty$ のときは

$$A_1 \leq \frac{1}{(a-1)^{1/(k+1)}} B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1}\right) \rightarrow 0,$$

$$a^{(k-2)/(k+1)} A_3 \leq \frac{a^{(k-2)/(k+1)}}{(a-1)^{k/(k+1)}} B\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k+1}{k+1}\right) \rightarrow 0,$$

$$A_2 \geq (a-1)^{k/(k+1)} B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right) \rightarrow +\infty.$$

となり, 従って (3.1) の左辺は負になる. 一方, $a \rightarrow 1$ のときは, ベータ関数に関する公式

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y).$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
 & kA_1 + 2a^{(k-2)/(k+1)}A_3 - A_2 \\
 & \geq \frac{k}{a^{1/(k+1)}}B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1}\right) + \frac{2}{a^{2/(k+1)}}B\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k+1}{k+1}\right) \\
 & \quad - a^{k/(k+1)}B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right) \\
 & = \frac{1}{a^{1/(k+1)}}B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right) + \frac{2}{a^{2/(k+1)}}B\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k+1}{k+1}\right) \\
 & \quad - a^{k/(k+1)}B\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right) \\
 & \xrightarrow{a \rightarrow 1} 2B\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k+1}{k+1}\right) > 0.
 \end{aligned}$$

であるから (3.1) の左辺は正になる.

以上のことから, 中間値の定理により (3.1) をみたす $a \in (1, \infty)$ が存在する (図 3.3 参照).

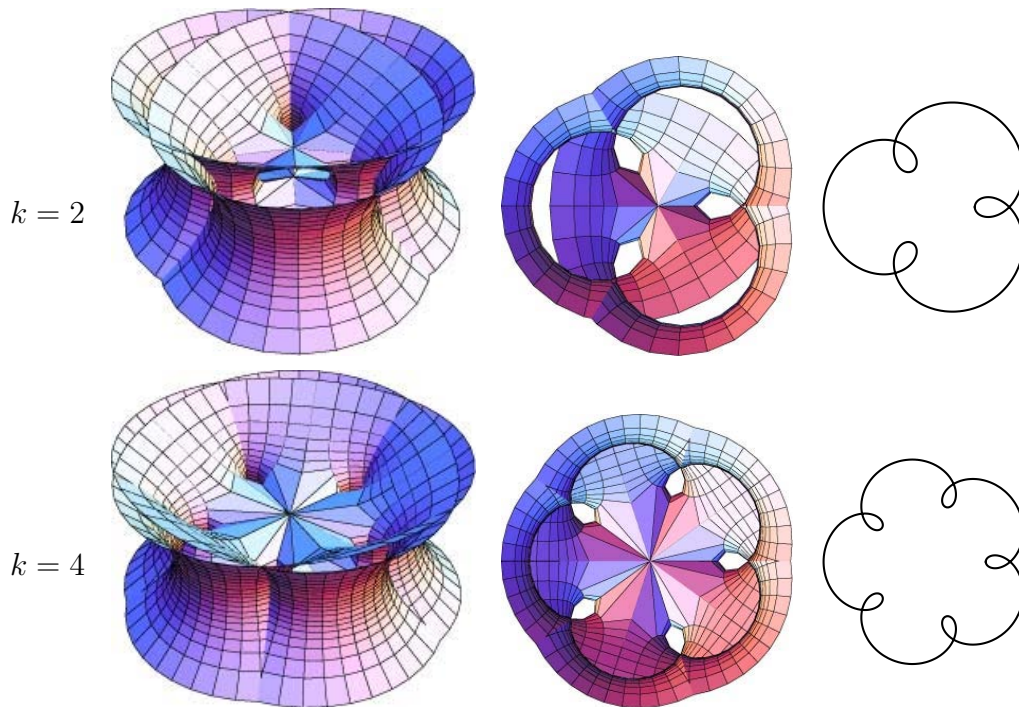


図 3.3. 種数 k で 2 つのエンドをもつ, $\deg(g) = k + 2$ の代数的極小曲面. 中央は曲面を xy 平面で切ったときの上半分を下から見たもの. 右は切り口に現れる曲線.

注意 3.5. k が 3 以上の奇数のときも, 同様の方法で (P) をみたく $a \in (1, \infty)$ が存在することを示すことができる. しかしこのとき種数は $k-1$, $\deg(g) = k+2$ であるから, (1.8) の等号は成り立たない (図 3.4 参照).

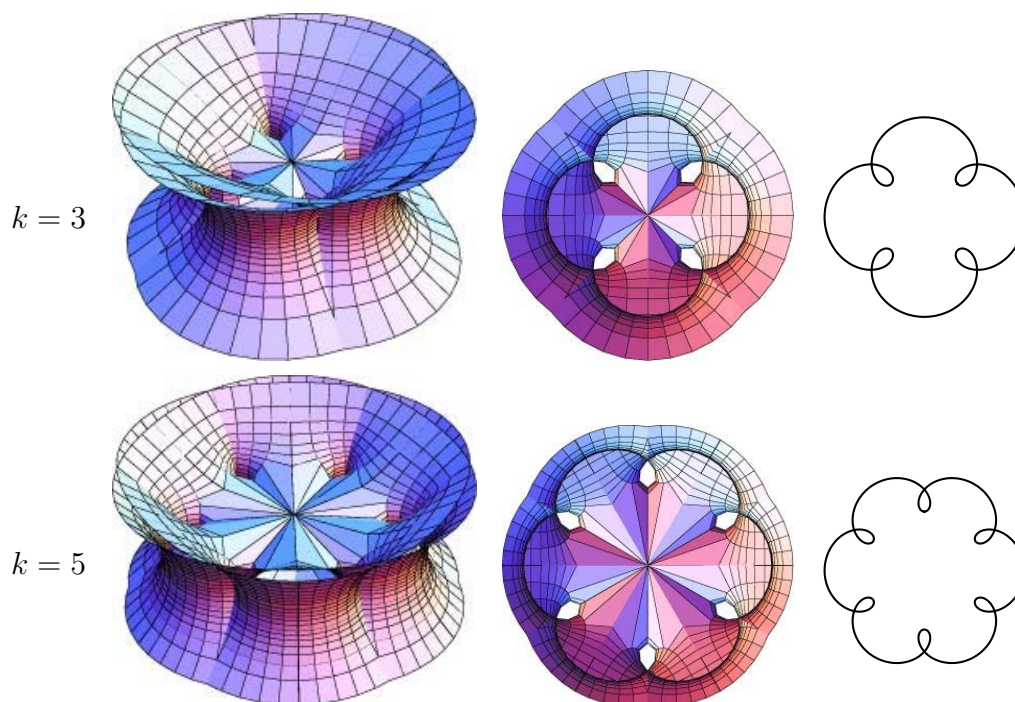


図 3.4. 種数 $k-1$ で 2 つのエンドをもつ, $\deg(g) = k+2$ の代数的極小曲面. 中央は曲面を xy 平面で切ったときの上半分を下から見たもの. 右は切り口に現れる曲線.

注意 3.6. 大阪大学の梅原雅顕先生より, f による $\{(z, w) \in M \mid |z| = \sqrt{a}\}$ の像 (図 3.3 および 3.4 の右の曲線) は, 外トロコイドに似ているのではないかと, というご指摘をいただいた. この曲線が測地線になっていることは示すことができたが, 外トロコイドと一致するかどうかは, 現段階ではわかっていない. しかしながら, もしこのことを証明できれば, それは極小曲面の Björling 公式の観点からも非常に興味深い性質であると思われる.

4. 残された問題

種数 γ が 3 以上の奇数のとき, 2 つのエンドをもつ代数的極小曲面 $f : M = \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, p_2\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ で不等式 (1.8) の等号をみたく例はまだ構成できていない. しかし, インディアナ大学の Matthias Weber 氏は Mathematica による数値計算で以下の例を構成した.

例 4.1 (Weber [We]). 任意の $\gamma \in \mathbb{N}$ をとる.

$$F_1(z; a_1, a_3, \dots, a_{2\gamma-1}) = \prod_{i=1}^{\gamma} (z - a_{2i-1}), \quad F_2(z; a_2, a_4, \dots, a_{2\gamma}) = \prod_{i=1}^{\gamma} (z - a_{2i})$$

とおく. ただし $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_{2\gamma}$ とする.

$$\bar{M} = \bar{M}_\gamma = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^2 = z \frac{F_1(z; a_1, a_3, \dots, a_{2\gamma-1})}{F_2(z; a_2, a_4, \dots, a_{2\gamma})} \right\}$$

とおく. \bar{M} は種数 γ の Riemann 面である.

$$M = \bar{M} \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\}, \quad g = c \frac{w}{z+1} \quad (c > 0), \quad \eta = \frac{(z+1)^2}{zw} dz$$

とおく. このとき, 適当な $c, a_2, a_3, \dots, a_{2\gamma}$ をとると (P) が成り立つ (図 4.1 参照).

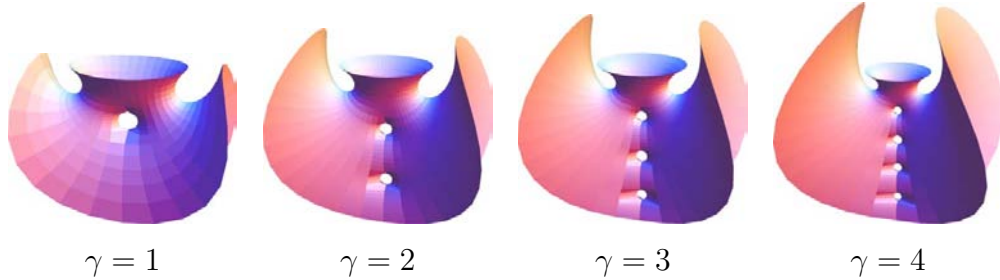


図 4.1. Weber 氏による, 種数 γ で 2 つのエンドをもつ, $\deg(g) = \gamma + 2$ の代数的極小曲面.

$\gamma = 1$ のとき, 我々はこの曲面の存在を数学的に証明することができたが, 曲面の対称性が低いため, γ が 2 以上のときの証明はまだできていない.

参考文献

- [BR] J. Berglund and W. Rossman, *Minimal surfaces with catenoid ends*, Pacific J. Math. **171** (1995), 353–371.
- [HM] D. Hoffman and W. H. Meeks III, *Embedded minimal surfaces of finite topology*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), 1–34.
- [H] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957), 13–72.
- [JM] L. Jorge and W. H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology, (2) **22** (1983), 203–221.
- [L] F. J. López, *The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than -12π* , Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 49–74.
- [O] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Ann. of Math. (2) **80** (1964), 340–364.

- [Sa] K. Sato, *Construction of higher genus minimal surfaces with one end and finite total curvature*, Tohoku Math. J. **48** (1996), 229–246.
- [Sc] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 791–809.
- [We] M. Weber, *personal communication*.
- [WW] M. Weber and M. Wolf, *Minimal surfaces of least total curvature and moduli spaces of plane polygonal arcs*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), 1129–1170.
- [Wo] M. Wohlgemuth, *Minimal surfaces of higher genus with finite total curvature*, Arch. Rational Mech. Anal. **137** (1997), 1–25.

〒 811-4192 福岡県宗像市赤間文教町 1-1, 福岡教育大学 教育学部 数学教育講座
E-mail address: fujimori@fukuoka-edu.ac.jp