

## Euclid 空間の極小曲面と Minkowski 空間の極大曲面 (1)

藤森 祥一

岡山大学 大学院自然科学研究科

2012 年 9 月 22–23 日

幾何学阿蘇研究集会

休暇村南阿蘇

## 体積の第 1 変分

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ : はめ込み,  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ :  $f$  の変分 ( $f_t = F(t, \cdot)$ ),  
 $\nu_t$ :  $f_t$  に沿う  $U$  上の単位法ベクトル場,  
 $H_t$ :  $f_t$  の平均曲率,  $dV_t$ :  $f_t$  の体積要素. このとき次が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(f_t) = -n \int_U \left\langle (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t}, H_t \nu_t \right\rangle dV_t.$$

ここで  $t=0$  とすると, 次を得る.

$f$  の体積の第 1 変分公式

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = -n \int_U \left\langle (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0}, H \nu \right\rangle dV.$$

ただし  $\nu := \nu_0$ ,  $H := H_0$ ,  $dV := dV_0$ .

定理

$f$  の任意の変分  $f_t$  に対して  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = 0$   
 $\iff f$  の平均曲率  $H \equiv 0$ .

## 超曲面の体積

$U: \mathbb{R}^n$  の有界閉集合,  $u = (u^1, \dots, u^n) \in U$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ : はめ込み.  
 $g := \sum g_{ij} du^i du^j$ :  $f$  による  $U$  の誘導計量 (i.e.  $g(X, Y) := \langle f_* X, f_* Y \rangle$ ).

定義

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  の体積  $\text{Vol}(f)$  を

$$\text{Vol}(f) := \int_U dV, \quad dV := \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 \wedge \dots \wedge du^n$$

で定める.  $dV$  を  $f$  の体積要素という.

次の 3 条件を満たす  $C^\infty$  写像  $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ( $I := (-\varepsilon, \varepsilon)$ ) を  $f(U)$  の境界を固定する滑らかな変分 (または単に  $f$  の変分) という.

- (1)  $\forall t \in I$  に対して  $f_t := F(t, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ははめ込み.
- (2)  $f_0(u) = f(u)$  ( $\forall u \in U$ ).
- (3)  $f_t(u) = f(u)$  ( $\forall t \in I, \forall u \in \partial U$ ).

## 体積の第 2 変分

$f$  が与えられた境界を固定する条件の下で体積最小

$$\iff f \text{ の任意の変分 } f_t \text{ に対して } \text{Vol}(f) \leq \text{Vol}(f_t)$$

$$\implies f \text{ の任意の変分 } f_t \text{ に対して } \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = 0$$

$$\iff H \equiv 0 \quad (\text{前ページの定理})$$

すなわち体積最小超曲面は  $H \equiv 0$  を満たす. この逆は?

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = 0 \quad (\text{i.e. } H \equiv 0) \text{ の条件の下で } \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t)$$

を計算する.

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = - \int_U n \frac{\partial H_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \left\langle (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0}, \nu \right\rangle dV$$

## 体積の第2変分

$\beta := \left\langle (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0}, \nu \right\rangle$  とおくと、次が成り立つ.

$$n \frac{\partial H_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Delta_g \beta + \beta |A|^2.$$

ただし  $A$  は  $f$  の第2基本形式,  $\Delta_g$  は  $g$  に関するラプラシアン. 従って次を得る.

$f$  の体積の第2変分公式

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) &= - \int_U \beta (\Delta_g \beta + \beta |A|^2) dV \\ &= \int_U (|\nabla_g \beta|^2 - \beta^2 |A|^2) dV \end{aligned}$$

ただし  $\nabla_g$  は  $g$  に関する勾配.

注意  $\beta \equiv 0$  となる変分を **自明な変分** という.

## 極小超曲面

$H \equiv 0$  を満たすはめ込みを **極小超曲面** という.



懸垂面



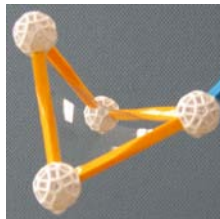
螺旋面



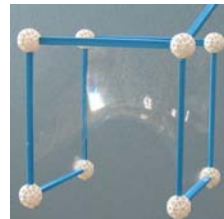
Möbius の帯



Enneper (order 3)



Schwarz D



Meeks superman

## 安定性

定義

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  は任意の変分に対してその第1変分が消えているとする (i.e.  $H \equiv 0$ ).  $f$  の第2変分が任意の非自明な変分に対して正となるとき,  $f$  は **安定** であるという.

命題

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ :  $H \equiv 0$  をみたすはめ込み.  $\nu: U \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ :  $f$  に沿う  $U$  上の単位法ベクトル場.

$U$  の  $\nu$  による像がある半超球面に含まれるならば,  $f$  は安定.

証明の鍵となる方程式

$$\Delta_g \nu + |A|^2 \nu + n \nabla_g H = 0$$

系

グラフ超曲面は常に安定 (実はグラフ超曲面は体積最小である).

## グラフ超曲面

$U: \mathbb{R}^n$  の領域,  $u = (u^1, \dots, u^n) \in U$ ,  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\varphi$  のグラフで表される超曲面の平均曲率  $H$  は次を満たす.

$$nH = \text{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} \right).$$

定義

$\text{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} \right) = 0$  を **極小超曲面の方程式** という.

注意

$n = 2$  のとき,  $(u^1, u^2) = (x, y)$  とおくと, 上式は

$$(1 + \varphi_y^2) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (1 + \varphi_x^2) \varphi_{yy} = 0$$

と同値である (J. Lagrange, 1760). この式を **極小曲面の方程式** という.

## Bernstein 問題

### 定理 (S. Bernstein, 1915)

$\mathbb{R}^2$  全体で定義された関数  $\varphi$  で表されるグラフ極小曲面は平面に限る.

### 問題

$\mathbb{R}^n$  全体で定義された関数  $\varphi$  で表されるグラフ極小超曲面は超平面に限るか.

この問題は,  $n = 2$  のとき S. Bernstein (1915),  $n = 3$  のとき E. de Giorgi (1961),  $n = 4$  のとき F. J. Almgren (1966),  $n \leq 7$  のとき J. Simons (1968) によってそれぞれ肯定的に解決され,  $n \geq 8$  のとき E. Bombieri, E. de Giorgi, E. Giusti (1969) によって否定的に解決されている. ( $n \leq 5$  のときは R. Schoen, L. Simon, S.-T. Yau (1974) によって再証明されている.)

## 極小曲面の例

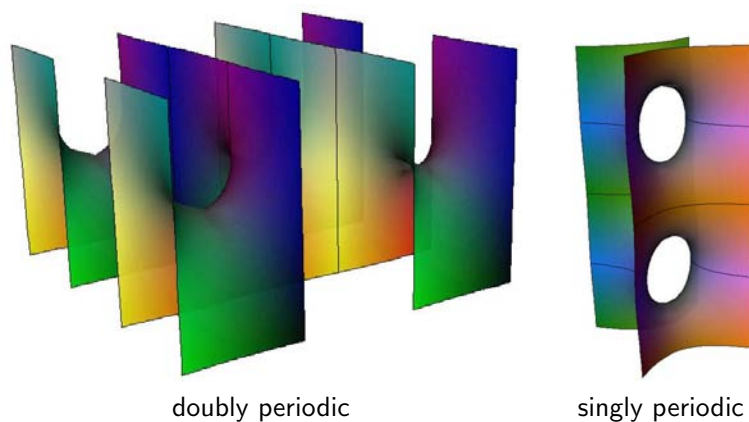
以下,  $n = 2$  とする.

- L. Euler (1744), 懸垂面が極小曲面であることを証明.
- J. Meusnier (1776), 螺旋面が極小曲面であることを証明.
- H. Scherk (1835) 新たな例の発見.

### 命題

- Gauss 曲率が一定な極小曲面は平面に限る.
- 回転面で極小曲面となるのは平面と懸垂面に限る (O. Bonnet, 1860).
- 線織面で極小曲面となるのは平面と常螺旋面に限る (E. Catalan, 1842).
- 移動曲面で極小曲面となるのは平面と Scherk の 2 重周期的曲面に限る (H. Scherk, 1835).

## Scherk の極小曲面 (Weierstrass 以前)



## Weierstrass の表現公式

$f : U \ni (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ : はめ込み,  
 $(x, y)$ :  $f$  の等温座標系 (i.e.  $|f_x| = |f_y|$ ,  $\langle f_x, f_y \rangle = 0$ ) とする.  
 $\nu$ :  $f$  に沿う  $U$  上の単位法ベクトルとすると,

$$f_{xx} + f_{yy} = 2H\nu$$

が成り立つ.

$f$  が極小曲面  $\iff$  各  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) が調和関数.

### 注意

このことから, 境界のないコンパクトな極小曲面が存在しないことがわかる.

$z = x + iy$  とおき,  $\varphi_j = \frac{\partial f_j}{\partial z} dz$  ( $j = 1, 2, 3$ ) とすると,

$f$  が極小曲面  $\iff$  各  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) が正則 1 形式.

## Weierstrass の表現公式

$\varphi_j$  は

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0, \quad |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 > 0$$

をみたす.

$$f_z dz = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \text{ であるから, } f = 2\operatorname{Re} \int (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

$\varphi_3$  が恒等的に 0 でないと仮定し,  $G = -(\varphi_1 + i\varphi_2)/\varphi_3$  とおくと,  $G$  は  $U$  上の有理型関数.

$$f = \operatorname{Re} \int \left( \left( \frac{1}{G} - G \right), i \left( \frac{1}{G} + G \right), 2 \right) \varphi_3.$$

これを **Weierstrass の表現公式** という (K. Weierstrass 1866, R. Osserman 1964).

## 周期問題

$M$  を Riemann 面とする.  $G$  を  $M$  上の有理型関数,  $\varphi_3$  を  $M$  上の正則 1 形式で,  $(|G|^{-1} + |G|)^2 |\varphi_3|^2$  が  $M$  上の完備かつ全曲率有限な Riemann 計量を定めるとする. このとき,  $M$  が単連結でなければ,

$$f = \operatorname{Re} \int \left( \left( \frac{1}{G} - G \right), i \left( \frac{1}{G} + G \right), 2 \right) \varphi_3.$$

は一般に well-defined にならない.

$$\operatorname{Per}(f) := \left\{ \operatorname{Re} \int_{\gamma} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \gamma \in H_1(M, \mathbb{Z}) \right\}$$

とおく.

## 第 1 基本形式, 第 2 基本形式, Gauss 写像

$f$  の第 1 基本形式  $ds^2$ , 第 2 基本形式  $A$  はそれぞれ,

$$ds^2 = \left( \frac{1}{|G|} + |G| \right)^2 |\varphi_3|^2, \quad A = -2 \operatorname{Re} Q, \quad Q := \frac{\varphi_3 dG}{G}$$

で与えられる.

$\nu: U \rightarrow S^2$  を  $f$  に沿う  $U$  上の単位法ベクトル場とし,  $\sigma: S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を立体射影とすると,

$$G = \sigma \circ \nu$$

が成り立つ. このことから, 以後,  $G$  を  $f$  の **Gauss 写像** と呼ぶ.

## 周期問題

- ①  $\operatorname{Per}(f) = \{0\}$  ならば,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  は  $M$  上 well-defined.
- ②  $\exists v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  s.t.  $\operatorname{Per}(f) \subset \Lambda_1 := \{nv : n \in \mathbb{Z}\}$  ならば,  $f$  は  $v$  方向に周期的.  $f$  を  $\mathbb{R}^3/\Lambda_1 = \mathbb{R}^2 \times S^1$  への写像と見なせば,  $f$  は well-defined.
- ③  $\exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  (1 次独立) s.t.  $\operatorname{Per}(f) \subset \Lambda_2 := \{\sum_{j=1}^2 n_j v_j : n_j \in \mathbb{Z}\}$  ならば,  $f$  は  $v_1, v_2$  方向に周期的.  $f$  を  $\mathbb{R}^3/\Lambda_2 = T^2 \times \mathbb{R}$  への写像と見なせば,  $f$  は well-defined.
- ④  $\exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  (1 次独立) s.t.  $\operatorname{Per}(f) \subset \Lambda_3 := \{\sum_{j=1}^3 n_j v_j : n_j \in \mathbb{Z}\}$  ならば,  $f$  は  $v_1, v_2, v_3$  方向に周期的.  $f$  を  $\mathbb{R}^3/\Lambda_3 = T^3$  への写像と見なせば,  $f$  は well-defined.

この,  $f$  の well-defined 性を調べる問題を, 極小曲面の**周期問題**という.

### 定義

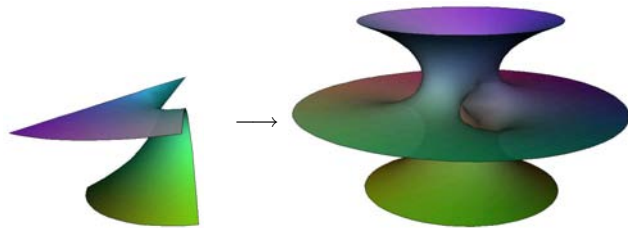
1 の曲面を **AIMS**, 2 の曲面を **SPMS**, 3 の曲面を **DPMS**, 4 の曲面を **TPMS** と呼ぶことにする.

## 対称性

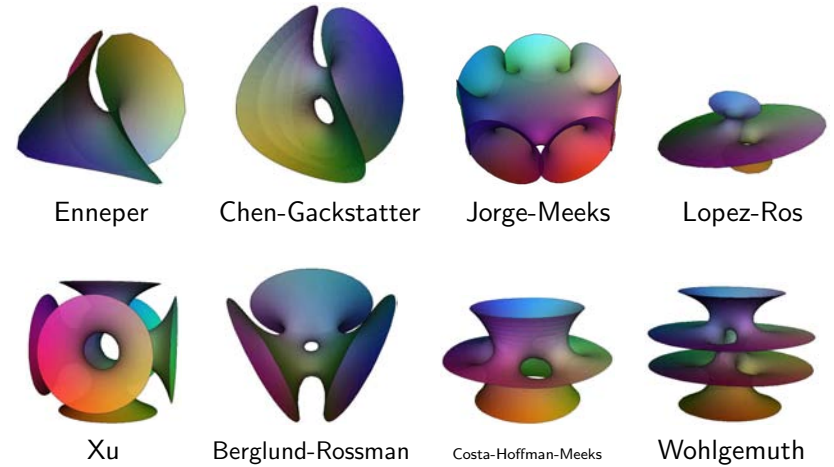
$f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  を極小曲面,  $c: I \rightarrow M$  を  $M$  上の測地線とする.  
 $Q := \varphi_3 dG/G$  とおく ( $Q$  を  $f$  の Hopf 微分という).  $Q$  は  $M$  上の正則 2 次微分である. Schwarz の鏡像原理を用いると, 次が得られる.

### 命題

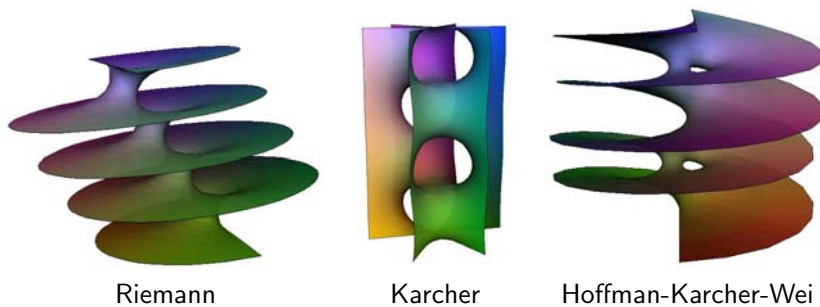
- $c$  が  $Q(c', c') \in i\mathbb{R}$  をみたすならば,  $c$  の  $f$  による像は直線. さらに,  $f(M)$  はこの直線に関して対称.
- $c$  が  $Q(c', c') \in \mathbb{R}$  をみたすならば,  $c$  の  $f$  による像は  $\mathbb{R}^3$  のある平面に含まれる. さらに,  $f(M)$  はこの平面に関して対称.



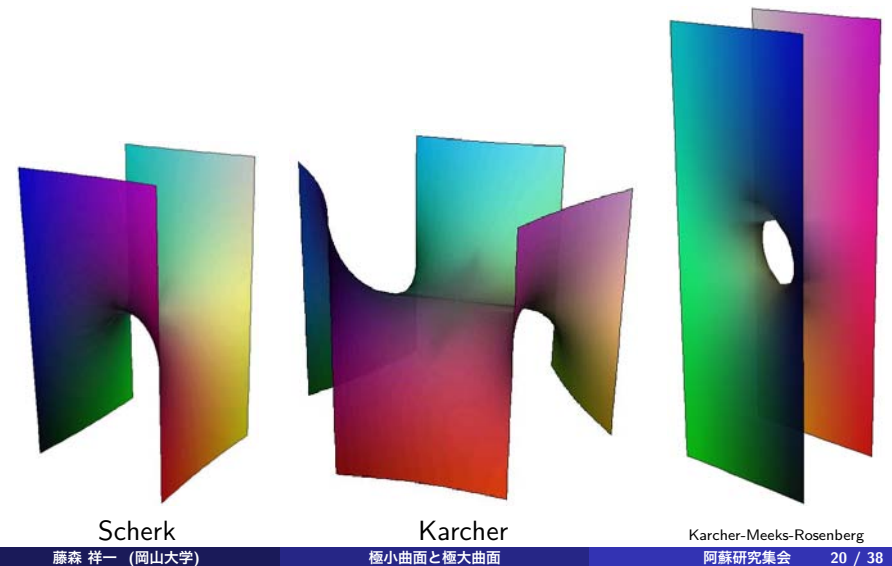
## 例 (Algebraic Minimal Surfaces)



## 例 (Singly Periodic Minimal Surfaces)

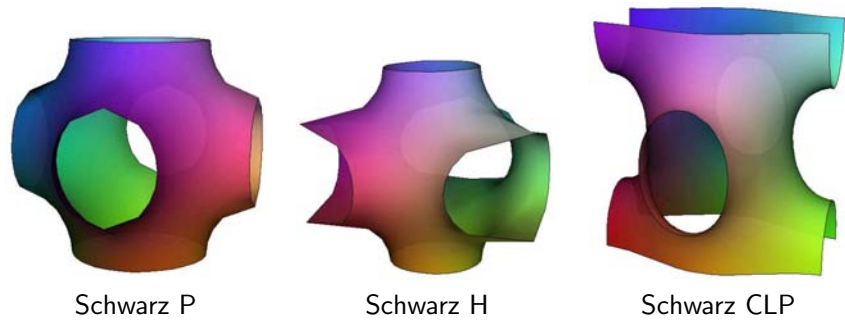


## 例 (Doubly Periodic Minimal Surfaces)





# 例 (Triply Periodic Minimal Surfaces)



Schwarz P

Schwarz H

Schwarz CLP

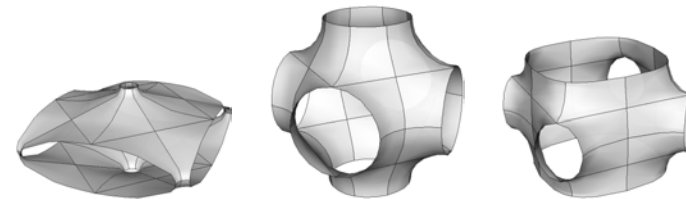
# Schwarz P 曲面, Schwarz D 曲面

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$

Schwarz P

$$G = z$$

$$\varphi_3 = \frac{zdz}{w}$$



a = 0.1

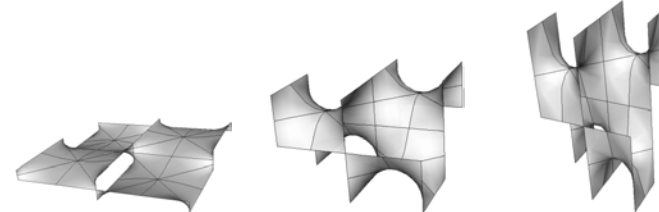
a =  $(\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$

a = 0.9

Schwarz D

$$G = z$$

$$\varphi_3 = i \frac{zdz}{w}$$



a = 0.1

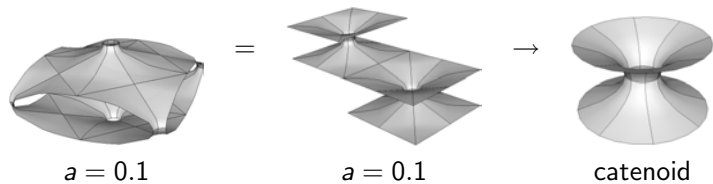
a =  $(\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$

a = 0.9

# Schwarz P, Schwarz D の極限: a → 0

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$

Schwarz P

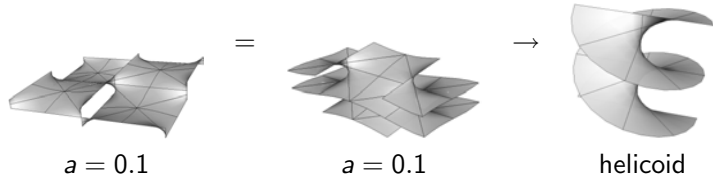


a = 0.1

a = 0.1

catenoid

Schwarz D



a = 0.1

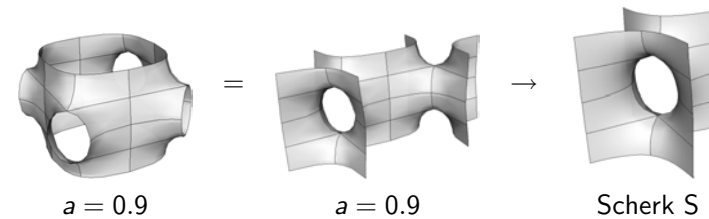
a = 0.1

helicoid

# Schwarz P, Schwarz D の極限: a → 1

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$

Schwarz P

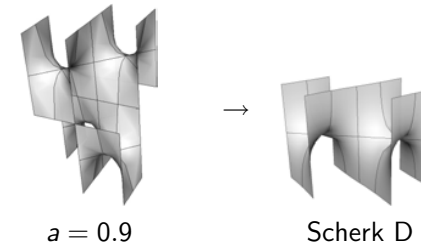


a = 0.9

a = 0.9

Scherk S

Schwarz D



a = 0.9

Scherk D

## Algebraic Minimal Surfaces (AIMS)

以後, AIMS  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  は完備かつ全曲率が有限な極小曲面とする.

### 定理 (Huber, 1957)

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  が AIMS

$\implies \exists \bar{M}_\gamma : \text{種数 } \gamma \text{ の閉 Riemann 面, } \exists p_1, \dots, p_n \in \bar{M}_\gamma$

such that

$$M = \bar{M}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \quad (\text{双正則}).$$

さらに  $G, \varphi_3$  は  $\bar{M}_\gamma$  上に有理型に拡張される. 除かれた点  $p_1, \dots, p_n$  は曲面  $f$  の **エンド** に対応する.

本講演では, 特に断らない限り

$$M = \bar{M}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \quad (\gamma = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots)$$

とする.

## Osserman 不等式

### 定理 (Osserman, 1964)

AIMS  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  は以下の不等式を満たす:

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dA \leq \chi(M) - n = \chi(\bar{M}) - 2n = 2(1 - \gamma - n).$$

さらに, “=”  $\iff$  各エンドが十分先では自己交叉をもたない (Jorge-Meeks, 1983).

**注意.**  $M$  が閉 Riemann 多様体ならば,

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \chi(M) \quad (\text{Gauss-Bonnet, 1848}).$$

$M$  が非コンパクトで有限全曲率をもつ完備 Riemann 多様体ならば,

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dA \leq \chi(M) \quad (\text{Cohn-Vossen, 1935}).$$

## Osserman 不等式

**注意.** 極小曲面の Gauss 曲率  $K$  は常に零以下であるから,  $M$  の絶対全曲率  $\tau(M)$  は

$$\tau(M) = \int_M (-K) dA$$

である.

**注意.**  $(-K)ds^2$  は,  $G$  による  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の Fubini-Study 計量の引き戻しを与える. 即ち,

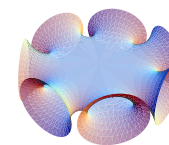
$$(-K)ds^2 = \frac{4|dG|^2}{(1+|G|^2)^2}.$$

よって  $\tau(M) = 4\pi \deg(G)$  であり, Osserman 不等式は

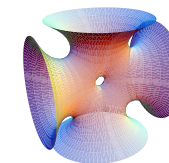
$$\deg(G) \geq \gamma + n - 1$$

と書くことができる.

## 等号を満たす例 ( $n \geq 3$ の場合)



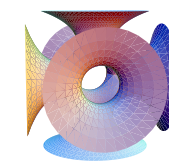
$(\gamma, n) = (0, 7)$



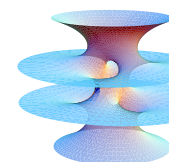
$(\gamma, n) = (1, 4)$



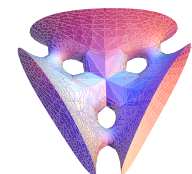
$(\gamma, n) = (14, 3)$



$(\gamma, n) = (0, 6)$



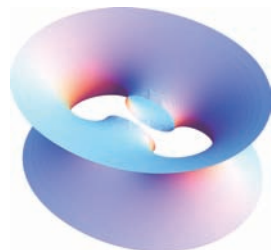
$(\gamma, n) = (2, 4)$



$(\gamma, n) = (3, 3)$

## $n \leq 2$ の場合

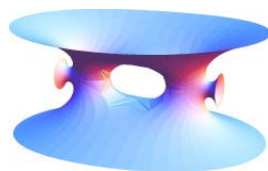
- $n = 1$  で等号を満たす AIMS (有限全曲率) は平面に限る.
- $n = 2$  で等号を満たす AIMS は懸垂面に限る (R. Schoen, 1983).



genus 1 catenoid

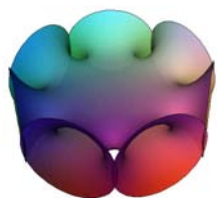


genus 1 wevy-catenoid

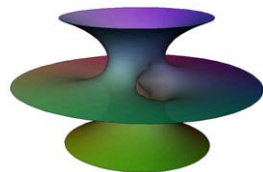


genus 1 fournoid

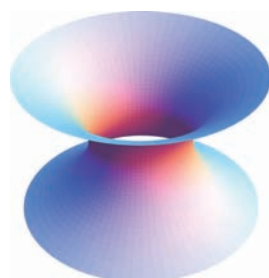
## $G$ の除外値数



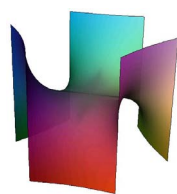
除外値数 0



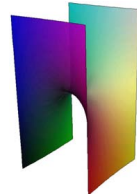
除外値数 1



除外値数 2



除外値数 3



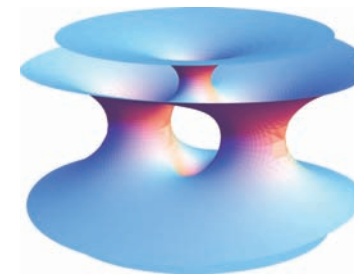
除外値数 4

## Hoffman-Meeks 予想

### 問題

種数  $\gamma$  で  $n$  個のエンドをもつ埋め込まれた AIMS は常に次の不等式を満たすか.

$$\gamma + 2 \geq n$$



Wohlgemuth  $(\gamma, n) = (1, 4)$

**注意** この曲面は埋め込まれていない (P. Romon, 1993).

## $G$ の除外値数

平面以外の極小曲面について、次の 2 つの定理が知られている.

**定理** (H. Fujimoto, 1988)

完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 4 である.

**定理** (R. Osserman, 1964)

完備有限全曲率極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 3 である.

**問題** (R. Osserman, 1964)

完備有限全曲率極小曲面で Gauss 写像の除外値数が 3 の例は存在するか.



## 向き付け不可能な極小曲面

$M'$ : 向き付け不可能な曲面.

$f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ : **向き付け不可能な極小曲面**  $:\Leftrightarrow M'$  の各点でどの単位法ベクトルをとってもそれに関する平均曲率が消えている.

$f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ : 完備かつ有限全曲率の向き付け不可能な極小曲面.

2重被覆  $\pi : M \rightarrow M'$  ( $M$ : 向き付け可能な曲面) をとると,

$f := f' \circ \pi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  は向き付け可能な極小曲面.

→ Weierstrass の表現公式が使える.

$(G, \varphi_3)$ :  $X$  の Weierstrass data.

$l : M \rightarrow M$ :  $\pi$  に関する反正則デッキ変換. このとき,

$$f \circ l(p) = f(p) \quad (\forall p \in M).$$

### 補題

$$f \circ l = f \iff G \circ l = -\frac{1}{G} \text{ かつ } l^* \varphi_3 = \bar{\varphi}_3.$$

## deg $\hat{G}$

### 定理 (Meeks, 1981)

$f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ : 向き付け不可能な完備有限全曲率極小曲面.

$\hat{G}$ :  $f'$  の Gauss 写像. このとき,

$$\deg \hat{G} \equiv \chi(\overline{M'}) \pmod{2}.$$

### 系 (Meeks, 1981)

$f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ : 向き付け不可能な完備有限全曲率極小曲面.

$\hat{G}$ :  $f'$  の Gauss 写像. このとき,

$$\deg \hat{G} \geq 3.$$

(証明)  $\pi : M \rightarrow M'$ : 2重被覆とする.

- $\deg \hat{G} = 1 \Rightarrow M = S^2 - \{p, q\}$  (embedded ends)  $\Rightarrow M$ : catenoid.
- $\deg \hat{G} = 2 \Rightarrow M = T^2 - \{p, q\}$  (embedded ends)  $\Rightarrow \beta$ . □

## Gauss 写像

$f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ : 完備かつ有限全曲率の向き付け不可能な極小曲面.

$G : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ :  $f = f' \circ \pi$  の Gauss 写像.

$\pi : M \rightarrow M'$ : 2重被覆,  $l : M \rightarrow M$ :  $\pi$  に関する反正則デッキ変換.

このとき,  $G \circ l = -1/\bar{G}$  だから,  $\exists \hat{G} : M' \rightarrow \mathbb{RP}^2$  s.t. 次の図式が可換:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_0 \\ M' & \xrightarrow{\hat{G}} & \mathbb{RP}^2 \end{array}$$

ただし  $p_0 : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{RP}^2 = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) / \langle l_0 \rangle$ : 自然な射影,  
 $l_0(z) := -1/\bar{z}$ .

### 定義

上の  $\hat{G}$  を, 向き付け不可能な極小曲面  $f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$  の **Gauss 写像** と呼ぶ.

**注意.**  $\deg(\pi) = \deg(p_0) = 2$  だから,  $\deg \hat{G}$  が定義できる:  $\deg \hat{G} = \deg G$ .

## 例: Möbius の帯 ( $\deg \hat{G} = 3$ )

$M = \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $l(z) = -1/\bar{z}$ ,  $M' = M / \langle l \rangle = \mathbb{RP}^2 - \{\pi(0)\}$ ,

$$G = z^2 \frac{z+1}{z-1}, \quad \varphi_3 = i \frac{z^2-1}{z^2} dz.$$



### 定理 (Meeks, 1981)

$\deg \hat{g} = 3$  の例はこれに限る.

**注意.**  $\deg \hat{g}$  が5以上の奇数のときも, Möbius の帯を作ることができる.

例: Klein の壺  $-\{1 \text{ 点}\}$  ( $\deg \hat{G} = 4$ )

$$M = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = \frac{rz - 1}{z + r} \right\} - \{(0, 0), (\infty, \infty)\},$$

$$(r \in \mathbb{R}_+ - \{1\}), I(z, w) = \left( -\frac{1}{z}, \frac{1}{w} \right), G = w \frac{z+1}{z-1}, \varphi_3 = i \frac{z^2 - 1}{z^2} dz.$$



定理 (López, 1996)

$\deg \hat{g} = 4$  の例はこれに限る.

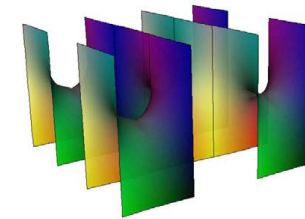
$\hat{G}$  の除外値数

定理

向き付け不可能な完備極小曲面  $f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$  の Gauss 写像  $\hat{G} : M' \rightarrow \mathbb{R}P^2$  の除外値数は高々2. 特に  $f'$  が有限全曲率ならば  $\hat{G}$  の除外値数は高々1.

問題

向き付け不可能な完備有限全曲率極小曲面で, Gauss 写像が全射でないものは存在するか.



doubly periodic, 除外値数 2