

Euclid 空間の極小曲面と Minkowski 空間の極大曲面 (2)

藤森 祥一

岡山大学 大学院自然科学研究科

2012 年 9 月 22–23 日

幾何学阿蘇研究集会

休暇村南阿蘇

体積の第 1 変分, 第 2 変分

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$: はめ込み, f_t : f の変分. ν : f に沿う単位法ベクトル場,
 H : f の平均曲率, dV : f の体積要素.

$\beta := \left\langle (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0}, \nu \right\rangle$ とおくと, 極小超曲面のときと同様に次が成立.

f の体積の第 1 変分公式

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = -n \int_U \beta H dV.$$

定理

f の任意の変分 f_t に対して $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = 0 \iff f$ の平均曲率 $H \equiv 0$.

f の体積の第 2 変分公式

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{Vol}(f_t) = \int_U (|\nabla_g \beta|^2 - \beta^2 |A|^2) dV$$

$\mathbb{L}^{n+1}$ の超曲面

$\mathbb{L}^{n+1}$: $(n+1)$ 次元 Lorentz-Minkowski 空間.

$\langle \cdot, \cdot \rangle := (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 - (dx^{n+1})^2$.

U : $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合, $u = (u^1, \dots, u^n) \in U$.

定義

はめ込み $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が空間的 $\iff g := f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ が正定値.

$$H_{\pm}^n := \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -1, \pm x^{n+1} > 0\}.$$

$f: U \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$: 空間的はめ込み.

ν : f に沿う単位法ベクトル場. i.e.

$\nu: U \rightarrow H_+^n$ または $\nu: U \rightarrow H_-^n$ such that

$$\langle f_* X, \nu \rangle = 0, \quad (\forall X \in T_p U), \quad \text{かつ} \quad \langle \nu, \nu \rangle = -1.$$

安定性

定義

$f: U \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ は任意の変分に対してその第 1 変分が消えているとする (i.e. $H \equiv 0$). f の第 2 変分が任意の非自明な変分に対して常に正または常に負となるとき, f は安定であるという.

$\langle \nu, \nu \rangle < 0$ であることと, ν の第 $(n+1)$ 成分が定符号であることから, 次を得る.

命題

$f: U \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$: $H \equiv 0$ をみたす空間的はめ込み. このとき f の第 2 変分は常に負である. すなわち f は安定で体積極大である.

$H \equiv 0$ を満たす空間的はめ込み $f: U \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ を極大超曲面という.

グラフ超曲面

$U: \mathbb{R}^n$ の領域, $u = (u^1, \dots, u^n) \in U$, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$.

φ のグラフで表される空間的超曲面の平均曲率 H は次を満たす.

$$nH = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1 - |\nabla \varphi|^2}} \right), \quad |\nabla \varphi|^2 < 1.$$

定義

$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1 - |\nabla \varphi|^2}} \right) = 0$ ($|\nabla \varphi|^2 < 1$) を **極大超曲面の方程式** という.

注意

$n = 2$ のとき, $(u^1, u^2) = (x, y)$ とおくと, 上式は

$$(1 - \varphi_y^2) \varphi_{xx} + 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (1 - \varphi_x^2) \varphi_{yy} = 0, \quad \varphi_x^2 + \varphi_y^2 < 1$$

と同値である. この式を **極大曲面の方程式** という.

Bernstein 型問題

定理 (E. Calabi, 1968)

$\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数 φ で表されるグラフ極大曲面は **平面** に限る.

注意

$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 < 1$ を仮定しなければ, 平面以外の例が存在する. 例えば

$$\varphi(x, y) = \log \cosh x - \log \cosh y.$$

定理 (Calabi 1968, Cheng-Yau 1976)

$\mathbb{R}^n$ 全体で定義された関数 φ で表されるグラフ極大超曲面は **超平面** に限る.

その他の大域的な結果:

- 完備な極大超曲面は **超平面** に限る (Calabi, Cheng-Yau).
- 向き付け不可能な空間的超曲面は存在しない.

Weierstrass 型表現公式

以下, $n = 2$ とする. $(x, y): f$ の **等温座標系** として,

$f: U \ni (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \in \mathbb{L}^3$: 空間的はめ込みとする. 極小曲面のときと同様に次を得る.

Weierstrass 型表現公式 (小林治, 1983)

$$f = \operatorname{Re} \int \left(\left(\frac{1}{G} + G \right), i \left(\frac{1}{G} - G \right), 2 \right) \varphi_3.$$

f の第 1 基本形式 ds^2 , 第 2 基本形式 A はそれぞれ,

$$ds^2 = \left(\frac{1}{|G|} - |G| \right)^2 |\varphi_3|^2, \quad A = -2 \operatorname{Re} Q, \quad Q := \frac{\varphi_3 dG}{G}$$

で与えられる.

$\nu: U \rightarrow H_+^2$ を f に沿う U 上の単位法ベクトル場とし,

$\sigma: H_+^2 \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ を立体射影とすると,

$$G = \sigma \circ \nu$$

が成り立つ. このことから, 以後, G を f の **Gauss 写像** と呼ぶ.

特異点を許容した極大曲面の研究

- O. Kobayashi “conelike singularities” (1984).
- F. J. M. Estudillo and A. Romero “generalized maximal surfaces” (1992).
- F. J. López, R. López and R. Souam “Riemann type maximal surface” (2000).
- L. J. Alías, R. M. B. Chaves and P. Mira “Björling problem” (2003).
- I. Fernández, F. J. López and R. Souam “moduli space” (2005).
- I. Fernández and F. J. López “periodic maximal surfaces” (2007).
- T. Imaizumi and S. Kato “flux” (2008).
- F. Martín, M. Umehara and K. Yamada “bounded maximal surfaces” (2009).

極大面

定義 (梅原・山田, 2006)

$f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が**極大面** : $\iff$

- $\exists W \subset M$ (稠密開集合) s.t. $f|_W$ は極大曲面.
- $df_p \neq 0$ ($\forall p \in M$).

極大面に対して $(|G|^{-1} + |G|)^2 |\varphi_3|^2$ は常に**正定値**.
従って f の特異点集合は $\{p \in M \mid |G(p)| = 1\}$.

定義 (梅原・山田, 2006)

極大面 $f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が**完備** : $\iff$

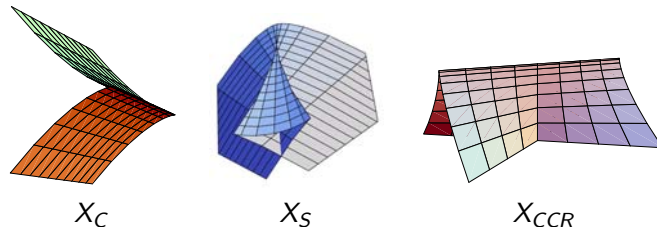
$\exists C \subset M$, $\exists T \in \Gamma(T^*M^2 \otimes T^*M^2)$: 対称 $(0, 2)$ テンソル such that
 $\underset{\text{cpt}}{M - C}$ 上 $T \equiv 0$ かつ $ds^2 + T$ は M 上の完備な Riemann 計量を定める.

特異点

$$X_C(u, v) = (u^2, u^3, v) \quad (\text{カスプ片})$$

$$X_S(u, v) = (3u^4 + u^2v, 2u^3 + uv, v) \quad (\text{ツバメの尾})$$

$$X_{CCR}(u, v) = (u, v^2, uv^3) \quad (\text{カスプ状交叉帽子})$$



定義

2つの C^∞ 級写像 $X_j: (\mathbb{R}^2, p_j) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($j = 1, 2$) が**右左同値** : $\iff$
 $\exists \varphi: (\mathbb{R}^2, p_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, p_2)$, $\Phi: (\mathbb{R}^3, X_1(p_1)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, X_2(p_2))$: 局所微分同相
such that $\Phi \circ X_1 = X_2 \circ \varphi$.

Osserman 型不等式

定理 (梅原・山田, 2006)

$f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$: 完備極大面, (G, φ_3) : X の Weierstrass data.

$\implies \exists \bar{M}$: コンパクト Riemann 面, $\exists p_1, \dots, p_n \in \bar{M}$ such that

- $M = \bar{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$ (双正則).
- G, φ_3 は $\bar{M}$ 上に有理型に拡張される.

$p_1, \dots, p_n$ は X のエンドに対応する ($\neq$ コンパクト極大面).

定理 (梅原・山田, 2006)

$f: M = \bar{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{L}^3$: 完備極大面,

(G, φ_3) : X の Weierstrass data.

$\implies$

- $2 \deg G \geq -\chi(\bar{M}) + 2n$.
- “=” $\iff$ 各エンドが十分先では自己交叉しない.

特異点の判定条件

定理 (梅原・山田, 2006)

$f: U \rightarrow \mathbb{L}^3$: 極大面, (G, φ_3) : X の Weierstrass data とする.

$\alpha = \frac{dG}{G\varphi_3}$, $\beta = G \frac{d\alpha}{dG}$ とおく.

$\implies$

- f は**フロント**.
- $p \in U$ が f の特異点 iff $|G(p)| = 1$.
- 特異点 p **非退化** iff p で $dG \neq 0$.
- f が特異点 p で**フロント** iff p で $\text{Re } \alpha \neq 0$.
- f が p で**カスプ片**と右左同値 iff p で $\text{Re } \alpha \neq 0$ かつ $\text{Im } \alpha \neq 0$.
- f が p で**ツバメの尾**と右左同値 iff
 p で $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ かつ $\text{Re } \beta \neq 0$.
- f が p で**カスプ状交叉帽子**と右左同値 iff
 p で $\alpha \in i\mathbb{R} - \{0\}$ かつ $\text{Im } \beta \neq 0$ (藤森・佐治・梅原・山田, 2008).

特異点の分類

$U \subset \mathbb{C}$: 単連結領域, $\mathcal{O}(U) := \{U \text{ 上の正則関数} \}$

$\mathcal{O}(U)$ にコンパクト開 C^∞ 位相を入れる.

$h \in \mathcal{O}(U)$ に対して $(G, \varphi_3) = (e^h, e^h dz)$ を Weierstrass data とする極大面を $f_h: U \rightarrow \mathbb{L}^3$ で表す.

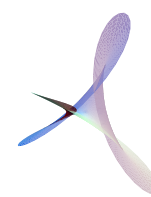
定理 (藤森・佐治・梅原・山田, 2008)

U の任意のコンパクト部分集合 K に対して

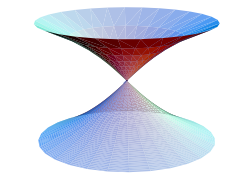
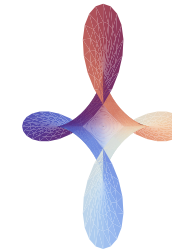
$$S(K) := \left\{ h \in \mathcal{O}(U) \mid \begin{array}{l} f_h \text{ の特異点は } K \text{ 上でカスプ片,} \\ \text{ツバメの尾, カスプ状交叉帽子のみ.} \end{array} \right\}$$

とおく. このとき $S(K)$ は $\mathcal{O}(U)$ の開かつ稠密な部分集合となる.

例

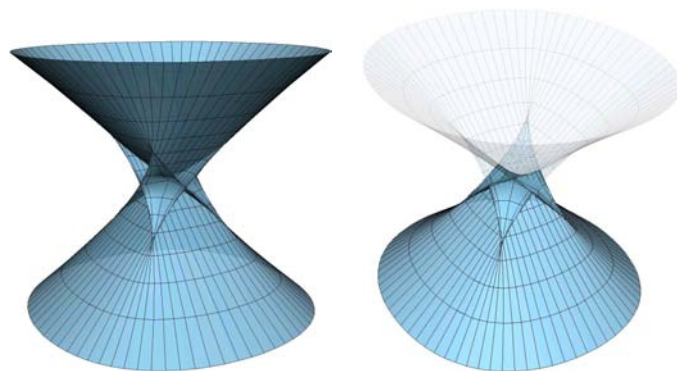


Maximal Enneper



Maximal catenoid

Kim-Yang catenoid



Y. W. Kim と S.-D. Yang は種数 1 で 2 つの埋め込まれたエンドをもつ極大面を発見した (2006). この極大面の Weierstrass data は

$$M = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^2 = z(z^2 - 1)\} - \{(0, 0), (\infty, \infty)\},$$

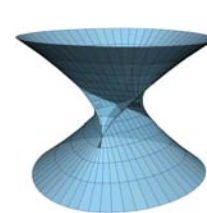
$$G = c \frac{w}{z} \text{ (for some } c > 0), \varphi_3 = \frac{dz}{z}.$$

高種数版

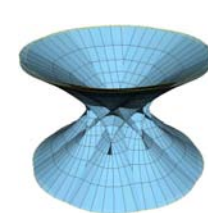
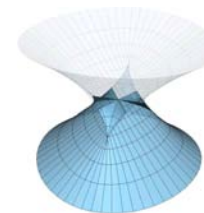
例 (藤森・Rossman・梅原・山田・Yang, 2009)

$$M_k = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^{k+1} = z(z^2 - 1)^k\} - \{(0, 0), (\infty, \infty)\}$$

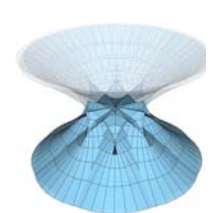
$$(\forall k \in \mathbb{Z}_+), G = c \frac{w}{z} \text{ (for some } c > 0), \varphi_3 = \frac{dz}{z}.$$



$k = 2$

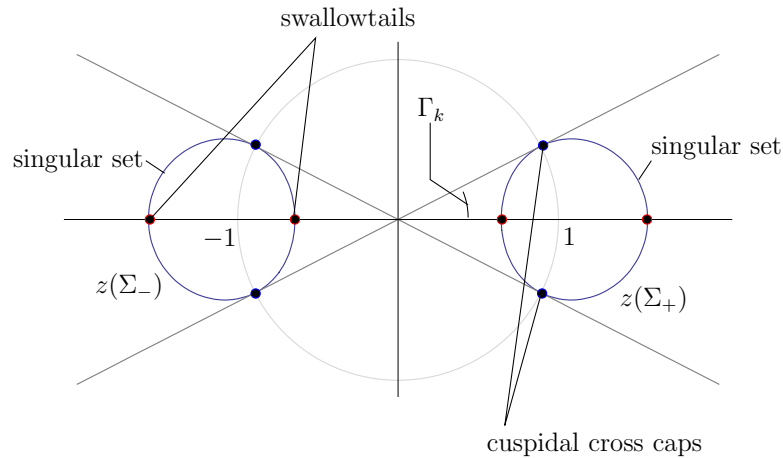


$k = 3$



注意 $k = 2m$ のときは, 実は種数 m の極大面の 2 重被覆になっている.

特異点集合



Gauss 写像

$f' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$: 向き付け不可能な極大面, $\pi : M \rightarrow M'$: 2重被覆.
 $G : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: $f = f' \circ \pi$ の Gauss 写像,
 $A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $A(z) := 1/\bar{z}$.
 $p_0 : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$: 自然な射影.
 このとき, $\exists \hat{G} : M' \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$: 共形写像 s.t. 次の図式が可換:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_0 \\ M' & \xrightarrow{\hat{G}} & (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle \end{array}$$

定義

上の $\hat{G}$ を, 向き付け不可能な極大面 $f' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ の **Gauss 写像** と呼ぶ.

注意. f' が完備なら, $\deg \hat{G}$ が定義できる: $\deg \hat{G} = \deg G$.

向き付け不可能な極大面

定義

- M' : 向き付け不可能な曲面.
 $f' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ が **向き付け不可能な極大面**
 $\iff \exists M$: 向き付け可能な曲面, $\exists \pi : M \rightarrow M'$: 2重被覆 s.t.
 $f = f' \circ \pi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が極大面.
- $f' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ が **完備**: $\iff f = f' \circ \pi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が完備.

(G, φ_3) : f の Weierstrass data.

$I : M \rightarrow M$: π に関する反正則デッキ変換. このとき,

$$f \circ I(p) = f(p) \quad (\forall p \in M).$$

補題

$$f \circ I = f \iff G \circ I = \frac{1}{\bar{G}} \quad \text{かつ} \quad I^* \varphi_3 = \bar{\varphi}_3.$$

Gauss 写像の写像度

定理 (藤森・López, 2010)

$f' : M' \rightarrow \mathbb{L}^3$: 向き付け不可能な完備極大面,
 $\hat{G} : M' \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\langle A \rangle$: X' の Gauss 写像. $\implies \deg \hat{G}$ は 4 以上の偶数.

補題 (Ross, 1992)

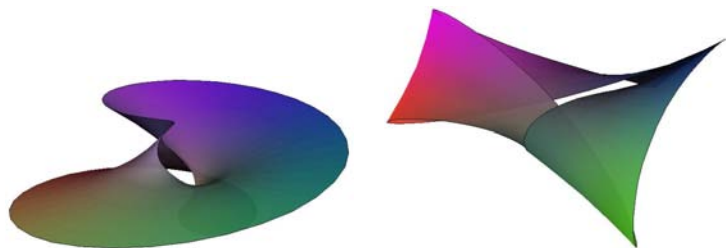
$\bar{M}$: コンパクト Riemann 面, $I : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$: 固定点のない反正則対合.
 $\implies \exists h : \bar{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ such that $h \circ I = -1/\bar{h}$.

(定理の証明) $g : \bar{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を $g(p) = G(p)h(p)$ ($p \in \bar{M}$) で定める.
 $g \circ I = (Gh) \circ I = (G \circ I)(h \circ I) = (1/\bar{G})(-1/\bar{h}) = -1/\bar{g}$ だから Meeks の
 補題により $\chi(\bar{M}') \equiv \deg g \pmod{2}$. また, $\chi(\bar{M}') \equiv \deg h \pmod{2}$. こ
 こで $\deg g = \deg(Gh) = \deg h + \deg G$ だから

$$\deg h \equiv \deg h + \deg G \pmod{2}. \quad \text{よって} \quad \deg G = \text{even}.$$

さらに $\deg G = 2$ の例が存在しないことも示すことができる. $\square$

例: Möbius の帯 ($\deg \hat{g} = 4$)



左: G がエンドで分岐している. 右: G がエンドで分岐していない.

定理 (藤森・López, 2010)

$\deg \hat{G} = 4$ の Möbius の帯は, 右の例の 2 径数族と, 左の例に限る.

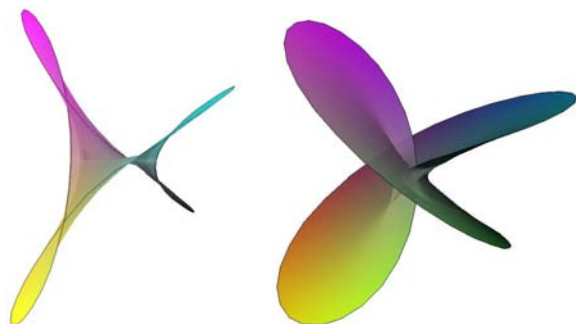
注意. 極小曲面 ($\deg \hat{G} = 3$) の場合, G はエンドで必ず分岐する (Meeks, 1981).

例: Möbius の帯 ($\deg \hat{G} = 4$) の Weierstrass data

$$M = \mathbb{C} - \{0\}, \quad l(z) = -1/\bar{z}, \quad M' = M/\langle l \rangle = \mathbb{RP}^2 - \{\pi(0)\},$$

- (左) $G = z^3 \frac{z+1}{z-1}, \quad \phi = i \frac{z^2-1}{z^2} dz.$
- (右) $G = z \frac{(rz-1)(sz-1)(tz-1)}{(z+r)(z+\bar{s})(z+\bar{t})},$
 $\varphi_3 = i \frac{(rz-1)(z+r)(sz-1)(z+\bar{s})(tz-1)(z+\bar{t})}{z^4} dz.$
 ただし $r > 0, s, t \in \mathbb{C} - \{0\}.$

例: Klein の壺 $-\{1 \text{ 点}\}$ ($\deg \hat{G} = 4$)



定理 (藤森・López, 2010)

$\deg \hat{G} = 4$ の Klein の壺 $-\{1 \text{ 点}\}$ の例は, ある対称性を仮定するとこの 2 つに限る.

注意. 極小曲面の場合はただ 1 つ存在 (López, 1993).

例: Klein の壺 $-\{1 \text{ 点}\}$ ($\deg \hat{G} = 4$) の Weierstrass data

$$M = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = \frac{rz-1}{z+r} \right\} - \{(0,0), (\infty, \infty)\},$$

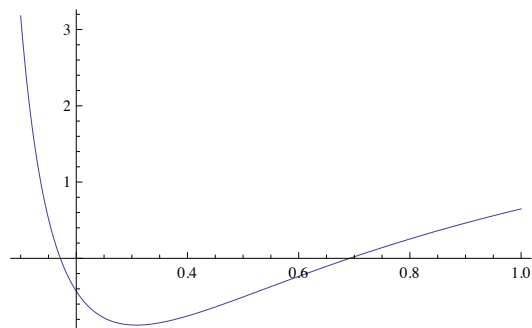
$$(r \in \mathbb{R}_+ - \{1\}),$$

$$l(z, w) = \left(-\frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{\bar{w}} \right), \quad G = w \frac{z+1}{z-1}, \quad \varphi_3 = i \frac{z^2-1}{z^2} dz.$$

(左) $r \approx 0.17137$, (右) $r \approx 0.691724$.

向き付け不可能な極大曲面 (高種数の例)

前ページの例の周期問題:



数値実験によると, 種数が 2, 3, 5 のとき解が 2 つずつ存在.

それ以外の時は存在しない?

極小曲面の場合は, 全ての種数で解が 1 つずつ存在することが知られている (López-Martin, 1995).