

3次元 Lorentz-Minkowski 空間内の 平均曲率 0 の埋め込み

藤森 祥一 (岡山大学)

Wayne Rossman 氏, 梅原雅顕氏, 山田光太郎氏, Seong-Deog Yang 氏との共同研究

2013 年 9 月 26 日

日本数学会秋季総合分科会

愛媛大学

$\mathbb{R}^3$ の極小曲面

定理 (Weierstrass 表現公式)

M : Riemann 面, g : M 上の有理型関数, η : M 上の正則 1 形式
s.t. $ds^2 = (1 + |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}$ が M 上の正定値計量.

$\Rightarrow$
 $f := \text{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \eta$ は $\mathbb{R}^3$ の極小曲面 (i.e. $H \equiv 0$).

(g, η) を f の **Weierstrass data**, g を f の **Gauss 写像** という.

注意

M が単連結でないとき, f は一般に M 上 well-defined にならない.

$$\text{Per}(f) := \left\{ \text{Re} \int_{\gamma} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \eta : \gamma \in H_1(M, \mathbb{Z}) \right\}$$

とおく.

周期問題

- ① $\text{Per}(f) = \{0\}$ ならば, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は M 上 well-defined.
- ② $\exists v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ s.t. $\text{Per}(f) \subset \Lambda_1 := \{nv : n \in \mathbb{Z}\}$ ならば, f は v 方向に周期的. f を $\mathbb{R}^3/\Lambda_1 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ への写像と見なせば, f は well-defined.
- ③ $\exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ (1 次独立) s.t. $\text{Per}(f) \subset \Lambda_2 := \{\sum_{j=1}^2 n_j v_j : n_j \in \mathbb{Z}\}$ ならば, f は v_1, v_2 方向に周期的. f を $\mathbb{R}^3/\Lambda_2 = T^2 \times \mathbb{R}$ への写像と見なせば, f は well-defined.
- ④ $\exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ (1 次独立) s.t. $\text{Per}(f) \subset \Lambda_3 := \{\sum_{j=1}^3 n_j v_j : n_j \in \mathbb{Z}\}$ ならば, f は v_1, v_2, v_3 方向に周期的. f を $\mathbb{R}^3/\Lambda_3 = T^3$ への写像と見なせば, f は well-defined.

f の well-defined 性を調べる問題を, 極小曲面の**周期問題**という.

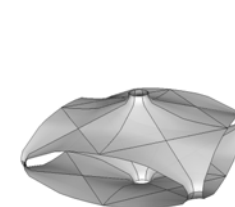
$\mathbb{R}^3$ の極小曲面の例, Schwarz 曲面

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$

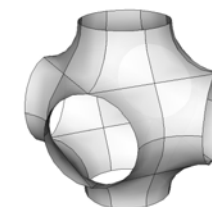
Schwarz P

$$g = z$$

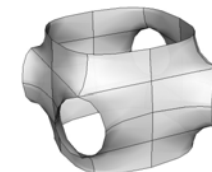
$$\eta = \frac{dz}{w}$$



$a = 0.1$



$a = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$

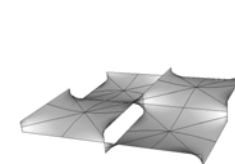


$a = 0.9$

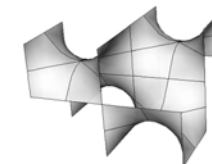
Schwarz D

$$g = z$$

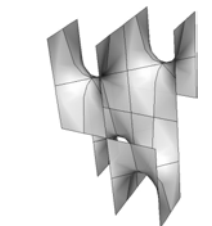
$$\eta = i \frac{dz}{w}$$



$a = 0.1$



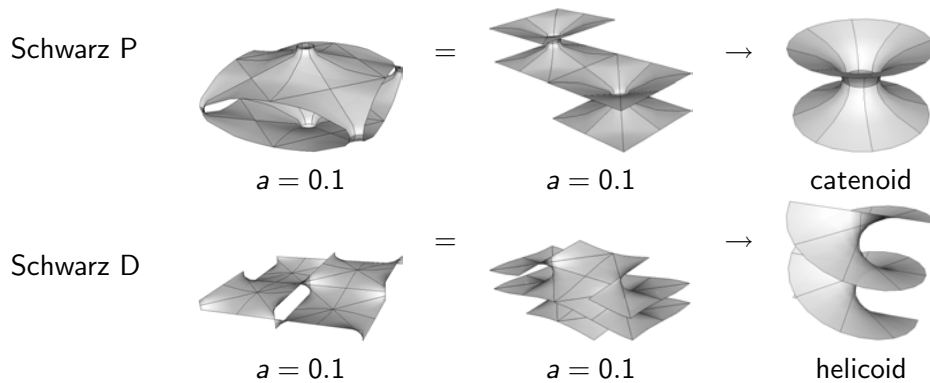
$a = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$



$a = 0.9$

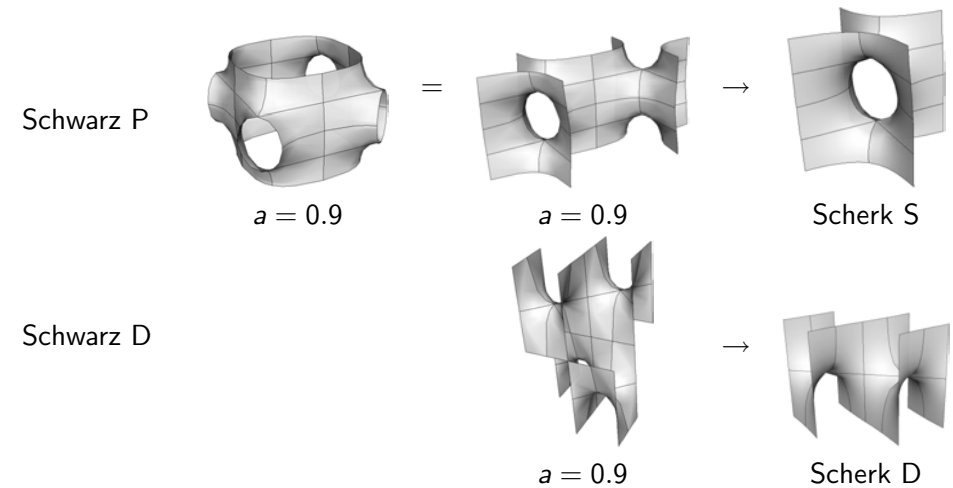
Schwarz 曲面の極限: $a \rightarrow 0$

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$



Schwarz 曲面の極限: $a \rightarrow 1$

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$



$\mathbb{L}^3$ の極大曲面

$\mathbb{L}^3$: 3次元 Lorentz-Minkowski 空間. $\langle \cdot, \cdot \rangle := dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$.

- $f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が空間的 $\iff \langle df, df \rangle$ が正定値計量.
- f が (空間的) 極大曲面 $\iff H \equiv 0$.

定理 (Weierstrass 型表現公式, [18])

M : Riemann 面, g : M 上の有理型関数, η : M 上の正則 1 形式
s.t. $ds^2 = (1 - |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}$ が M 上の正定値計量.

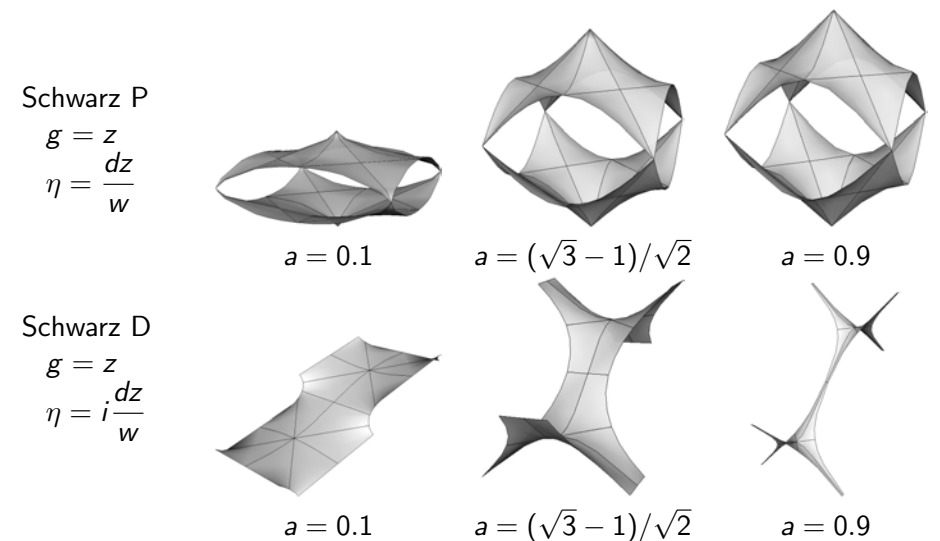
$\implies$
 $f := \text{Re} \int (1 + g^2, i(1 - g^2), 2g) \eta$ は $\mathbb{L}^3$ の空間的極大曲面.

(g, η) を f の Weierstrass data, g を f の Gauss 写像という.

完備な極大曲面は平面に限る [2].

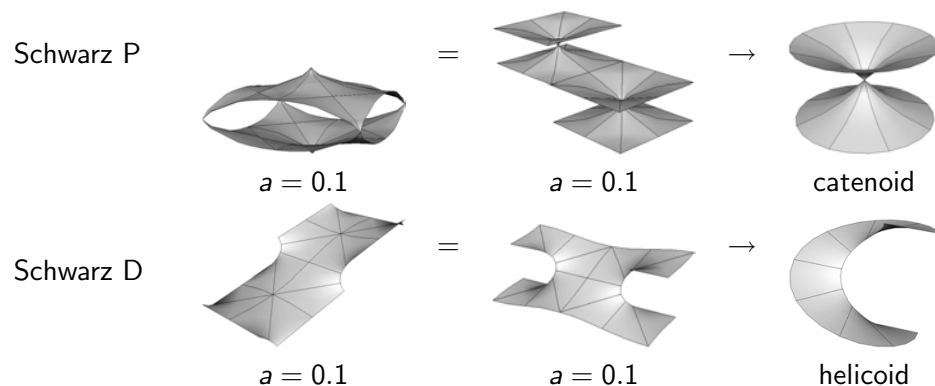
$\mathbb{L}^3$ の極大曲面の例, Schwarz 型曲面

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$



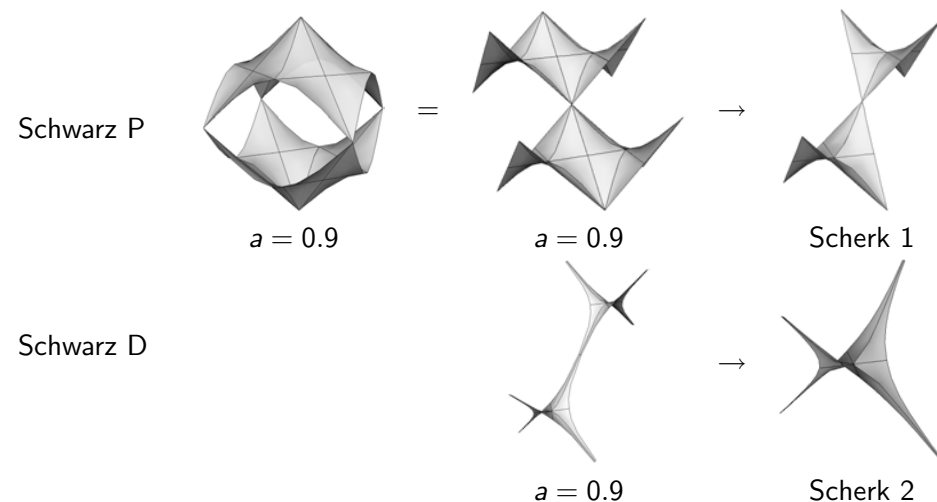
Schwarz 型曲面の極限: $a \rightarrow 0$

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbf{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$

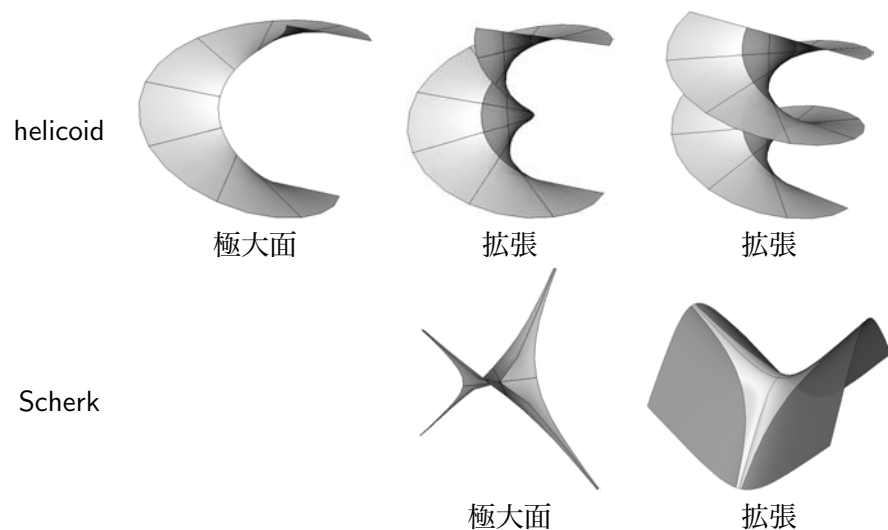


Schwarz 型曲面の極限: $a \rightarrow 1$

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbf{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}, (0 < a < 1)$$



極大面の折り目特異点から時間的曲面への拡張



極大面と折り目特異点

定義 ([5], [20])

M : Riemann 面, $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$: 極大面 $\iff$
 $\exists W \subset M$ (open dense) s.t. $f|_W$: 極大曲面, かつ $df(p) \neq 0$ ($\forall p \in M$).

事実 ([5], [20])

$f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$: 極大面, (g, η) : f の W-data.

- f の特異点集合 $= \{p \in M; |g(p)| = 1\}$.
- M 上の正則曲線 γ が折り目特異点
 $\iff \gamma$ 上 $dg \neq 0$ かつ $\text{Re} \left(\frac{dg}{g^2 \eta} \right) = 0$.

定義

正則曲線 $\sigma : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^3$ が非退化光的曲線
 $\iff \sigma'(p)$ が光的かつ $\sigma'(p)$ と $\sigma''(p)$ が 1 次独立 ($\forall p \in I$).

時間的極小曲面, 平均曲率 0 曲面

- $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が時間的 $\iff \langle df, df \rangle$ が Lorentz 計量.
- f が (時間的) 極小曲面 $\iff H \equiv 0$.

注意

$\mathbb{L}^3$ のグラフ $t = \varphi(x, y)$ が空間的極大曲面 (resp. 時間的極小曲面) $\iff$

$$(1 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (1 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} = 0 \quad (\star)$$

かつ $1 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0$ (resp. $1 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 < 0$).

定義

($\star$) を満たすグラフを ($\mathbb{L}^3$ の) 平均曲率 0 曲面と呼ぶ.

極大面の折り目特異点から時間的極小曲面への拡張

定理 ([11,12,13], および [17], [15], [5])

$f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$: 折り目特異点をもつ極大面,

$\gamma(t)$ ($t \in I$): f の折り目特異点.

$\implies \hat{\gamma}(t) := f \circ \gamma(t)$ は非退化光的曲線で

$$\tilde{f}(u, v) := \frac{1}{2} (\hat{\gamma}(u + v) + \hat{\gamma}(u - v))$$

は f の γ に沿う時間的極小曲面への実解析的拡張.

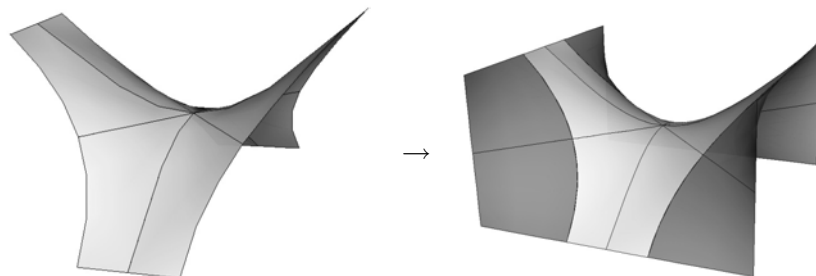
逆に, 空間的極大曲面と時間的極小曲面の境界が非退化光的曲線である平均曲率 0 曲面は, 折り目特異点をもつ極大面の実解析的拡張によって得られる.

定理 ([17])

$t = \varphi(x, y)$: 平均曲率 0 曲面のグラフ.

$\implies \{(t, x, y) \in \mathbb{L}^3; 1 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 = 0\}$ は非退化光的曲線または光的直線.

Schwarz D 型極大面の拡張



極大面

拡張

Schwarz D 型極大面の拡張によって次の定理が得られる.

定理

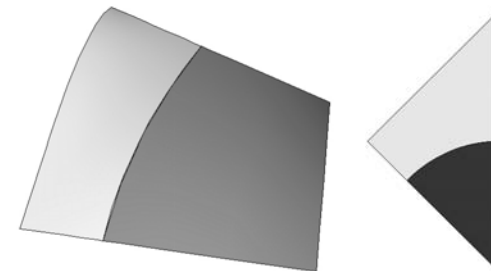
$\forall a \in (0, 1), \exists \Sigma_a$: 種数 3 の 2 次元有向閉多様体, Γ_a : 3 次元格子,

$$\exists f_a : \Sigma_a \rightarrow \mathbb{L}^3 / \Gamma_a \quad \text{平均曲率 0 埋め込み}$$

埋め込まれていることの証明

$$D^{\max} := \{(z, w) \in M_a; |z| < 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/4\},$$

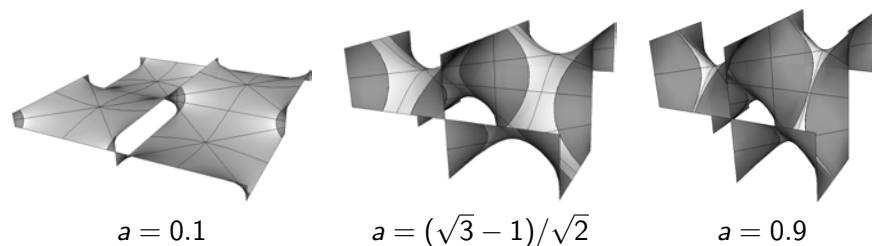
$$D^{\min} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq \pi/4, 0 < v \leq \pi/2\}.$$



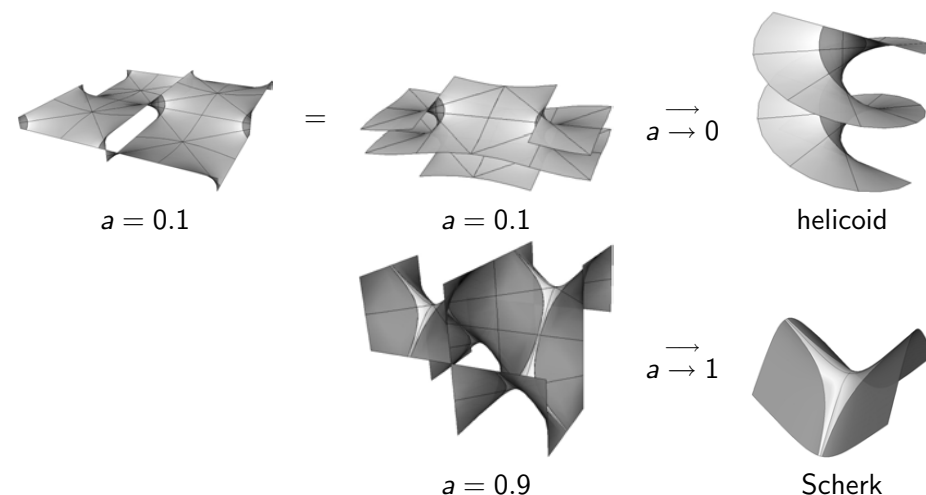
$$f(D^{\max}) \cup \tilde{f}(D^{\min})$$

最初に基本ピース $f(D^{\max}) \cup \tilde{f}(D^{\min})$ が埋め込まれていること, およびある三角柱に含まれていることを示す. そして基本ピースを鏡映で増やしたときに互いに交わらないことを示す.

Schwarz D 型平均曲率0埋め込み



極限



光的直線に沿って型変化する例

定理 ([4])

光的直線に沿って型変化する平均曲率 0 曲面が存在する.



$$c = 1/2, |x| < 0.8$$

証明の概略

$t = \varphi(x, y)$ のグラフで平均曲率 0 曲面の方程式 (★) を満たし,

$\varphi(x, y) = y + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k(y)}{k} x^k$ の形の中級数展開をもつものの存在を示す.

$$b_k''(y) = -k(P_k + Q_k - R_k), \quad b_k(0) = b_k'(0) = 0 \quad (k \geq 4),$$

$$P_k := \sum_{m=3}^{k-1} \frac{2(k-2m+3)}{k-m+2} b_m b_{k-m+2} \quad (k \geq 4),$$

$$Q_k := \sum_{m=3}^{k-4} \sum_{n=3}^{k-m-1} \frac{3n-k+m-1}{mn} b_m' b_n' b_{k-m-n+2} \quad (k \geq 7),$$

$$R_k := \sum_{m=3}^{k-4} \sum_{n=3}^{k-m-1} \frac{b_m b_n b_{k-m-n+2}''}{k-m-n+2} \quad (k \geq 7),$$

$Q_k = R_k = 0$ ($4 \leq k \leq 6$) とおくと, $b_k(y)$ は (★) の形式的中級数解を与える. さらに Weierstrass M 判定法を用いて $y = 0$ における収束半径が正であることを示す. $b_3 = 3cy$, $b_4 = -4c^2y^3$, $b_5 = 9c^3y^5$, $b_6 = -24c^2y^7, \dots$

流体力学との関係 [5]

$\mathbf{v} = (u, v)$ を速度ベクトル場, ρ を密度, p を圧力とする 2 次元 flow が次の 4 条件を満たすとする:

- ① 順圧である. i.e. p は ρ のみに依存する.
このとき, $c := \sqrt{dp/d\rho}$ を **局所音速** という.
 - ② 定常流である. i.e. $\mathbf{v}$, ρ , p はいずれも時間に依存しない.
 - ③ 外力の影響を受けない.
 - ④ 渦無しである. i.e. $\text{rot}\mathbf{v} = v_x - u_y = 0$.
- (2) により, **連続方程式** は $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0$ となるので, 滑らかな関数 $\psi = \psi(x, y)$ が存在して

$$\psi_x = -\rho v, \quad \psi_y = \rho u$$

を満たす. ψ をこの flow の **流れ関数** という.

流体力学との関係 [5]

流れ関数 ψ は次を満たす:

$$(\rho^2 c^2 - \psi_y^2) \psi_{xx} + 2\psi_x \psi_y \psi_{xy} + (\rho^2 c^2 - \psi_x^2) \psi_{yy} = 0.$$

$\rho c = 1$ ならば, これは平均曲率 0 曲面の方程式 (★) と一致する.

$\rho c = 1$ と仮定.

$\Rightarrow \exists \rho_0$ 正定数 s.t.

$$p = \text{const.} - \rho^{-1},$$

$$\rho = \rho_0 |1 - \psi_x^2 - \psi_y^2|^{1/2}, \quad c = 1/\rho = \rho_0^{-1} |1 - \psi_x^2 - \psi_y^2|^{-1/2}.$$

また, $\mathbf{v} = \rho^{-1}(\psi_y, -\psi_x)$.

補題

$$|\mathbf{v}| > c \text{ (resp. } |\mathbf{v}| < c) \iff 1 - \psi_x^2 - \psi_y^2 < 0 \text{ (resp. } 1 - \psi_x^2 - \psi_y^2 > 0).$$

流体力学との関係 [5]

定理

$\sigma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$: 局所凸閉曲線とする (t : 弧長).

$\Rightarrow \exists \psi = \psi(x, y)$ s.t. $(x, y, \psi(x, y))$ は非退化光的曲線 $(x(t), y(t), t)$ に沿って型変化する平均曲率 0 曲面. すなわち ψ は $\rho c = 1$ をみたすある flow の流れ関数になっている. さらに, この flow の速度ベクトル場

$\mathbf{v} = \rho^{-1}(\psi_y, -\psi_x)$ は次を満たす:

- (x, y) が $\sigma(t)$ に近づくとき $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$.
- この flow は σ に沿って亜音速から超音速へ変化する.
- 閉曲線の内側が超音速となる領域である.

References

-  S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, preprint.
-  S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, preprint.
-  S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, preprint.