Rational normal curves totally tangent to Hermitian varieties

島田　伊知朗　　（広島大・理）

p を素数とし，q を p のべき，k を有限体 $\mathbb{F}_{q^2}$ の代数閉包とする．射影空間 $\mathbb{P}^n$ の $\mathbb{F}_{q^2}$ 上定義された超曲面は，$q+1$ 次 Fermat 多様体

$$X_I \quad : \quad x_0^{q+1} + \cdots + x_n^{q+1} = 0$$

と $\mathbb{F}_{q^2}$ 上射影同値であるとき， Hermite 多様体と呼ばれる．X_I と k 上射影同値である超曲面を k-Hermite 多様体と呼ぶ．k-Hermite 多様体 X の射影的自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ は $\mathbb{P}^n$ の k 上の自己同型群 $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ の部分群として $\mathrm{PGU}_{n+1}(\mathbb{F}_{q^2})$ と共役である．

B. Segre による研究 [3] を出発点として，k-Hermite 多様体の幾何学的性質は深く研究されてきた．たとえば [1] を参照されたい．我々は論文 [4] において B. Segre の結果 ([3, n. 81]) の高次元化である次の定理を示した．

X を $\mathbb{P}^n$ 内の k-Hermite 多様体とする．射影空間 $\mathbb{P}^n$ の rational normal curve Γ は X と $q+1$ 個の相異なる点で n 重に接するとき，X に totally tangent であるという．

Rational normal curve Γ の相異なる $q+1$ 個の点の集合 S が Baer subset であるとは， $\mathbb{F}_q$ 上定義された射影直線 $\mathbb{P}^1$ への k 上定義された同型

$$t \quad : \quad \Gamma \ \xrightarrow{\sim}\ \mathbb{P}^1 \otimes k$$

が存在して， $S = t^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))$ となることである．

主定理. $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ でありかつ $2n \le q$ とする．X を $\mathbb{P}^n$ 内の k-Hermite 多様体とする．

(1) X に totally tangent である rational normal curves の集合 R_X は空でなく，X の射影的自己同型群 $\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{PGU}_{n+1}(\mathbb{F}_{q^2})$ が推移的に作用する．各元の stabilizer subgroup は $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ と同型である．特に R_X は

$$|\mathrm{PGU}_{n+1}(\mathbb{F}_{q^2})|/|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)|$$

個の元からなる．

(2) $\Gamma \in R_X$ なら，$\Gamma \cap X$ は Γ の Baer subset である．

(3) X が Hermite 多様体なら，各 $\Gamma \in R_X$ は $\mathbb{F}_{q^2}$ 上定義されており，$\Gamma \cap X$ の各点は $\mathbb{F}_{q^2}$-有理点である．

例． 標数 5 における Fermat 6 次曲線 $B \subset \mathbb{P}^2$ で分岐する 2 重被覆 $W \to \mathbb{P}^2$ を考える．W は Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面となる．B に 6 点で接する 2 次曲線が $3,150$ 本存在する．これらの 2 次曲線の引き戻しは W 上の $6,300$ 本の (-2)-曲線を与える．このように構成された (-2)-曲線は W の様々な射影モデルの構成 [5] において使われた．

証明において重要な役割を果たすのは Lang [2] による次の定理である．正則行列 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ に対し，超曲面

$$X_A := \left\{ \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j^q = 0 \right\}$$

を考える．

定理． $\mathbb{P}^n$ の超曲面 X が k-Hermite 多様体となるための必要十分条件は，正則行列 $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ が存在して $X = X_A$ となることである．

$\mathcal{P}$ を k-Hermite 多様体のなす集合とする．$\mathbb{P}^n$ の自己同型群 $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ は $\mathcal{P}$ に自然に作用し，k-Hermite 多様体の定義によりこの作用は transitive である．$X \in \mathcal{P}$ の stabilizer subgroup が $\mathrm{Aut}(X)$ に他ならない．

集合 $\mathcal{V}$ を

$$\mathcal{V} := \left\{ (\Gamma, P_0, P_1, P_\infty) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Gamma \text{ は } \mathbb{P}^n \text{ の rational normal curve であり，} \\ P_0, P_1, P_\infty \text{ はその上の相異なる 3 点} \end{array} \right\}$$

により定義する．$\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ は $\mathcal{V}$ に simply transitive に作用する．

$\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{V}$ を

$$\mathcal{I} := \left\{ (X, \Gamma, P_0, P_1, P_\infty) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Gamma \in R_X \text{ であり，} P_0, P_1, P_\infty \text{ は } X \cap \Gamma \text{ の} \\ \text{相異なる 3 点} \end{array} \right\}$$

により定義する．射影 $\mathcal{I} \to \mathcal{V}$ は全単射である．実際,

$$(\Gamma^{(0)}, P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, P_\infty^{(0)}) \quad \in \quad \mathcal{V}$$

を，$\Gamma^{(0)}$ を $\gamma^{(0)} : t \mapsto [1 : t : \cdots : t^n]$ の像とし，

$$P_0^{(0)} := \gamma^{(0)}(0), \quad P_1^{(0)} := \gamma^{(0)}(1), \quad P_\infty^{(0)} := \gamma^{(0)}(\infty),$$

により定める．このとき $A=(a_{ij})\in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ に対し，

$$(X_A, \Gamma^{(0)}, P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, P_\infty^{(0)}) \ \in\ \mathcal{I}$$

となるための必要十分条件は，多項式

$$f(t)=\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}t^{i+jq}$$

を $(n+1)q$ 次式と見たとき，$f(t)=0$ が $t=0,1,\infty$ において n 重根を持つことである．この条件を満たす $A=A_0$ が up to multiplicative constants で unique に存在する．(ここにおいて条件「$n\not\equiv 0 \pmod p$ でありかつ $2n\le q$」を用いる．) さらに A_0 の具体的な形をみることにより，$X_{A_0}\cap\Gamma^{(0)}$ は $\Gamma^{(0)}$ の $P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, P_\infty^{(0)}$ を含む unique な Baer subset（すなわち $\gamma_0(\mathbb{F}_q\cup\{\infty\})$）となることがわかる．

この全単射により，$\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ は $\mathcal{I}$ に simply transitive に作用することがわかる．従って射影 $\pi_{\mathcal{P}}:\mathcal{I}\to\mathcal{P}$ の $X\in\mathcal{P}$ 上のファイバー $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(X)$ 上に $\mathrm{Aut}(X)$ が simply transitive に作用する．$\Gamma\in R_X$ とし，$\mathrm{Aut}(X)$ の R_X への作用の Γ の stabilizer subgroup を Stab とする．すると Stab は 3 点 P_0, P_1, P_∞ を忘れる射影 $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(X)\to R_X$ の Γ 上のファイバーに simply transitive に作用する．したがって Stab は $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ と同一視され，R_X は $\mathrm{Aut}(X)/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ と同一視される．

参考文献

[1] J. W. P. Hirschfeld and J. A. Thas. *General Galois geometries*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications.

[2] Serge Lang. Algebraic groups over finite fields. *Amer. J. Math.*, 78:555–563, 1956.

[3] Beniamino Segre. Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 70:1–201, 1965.

[4] Ichiro Shimada. A note on rational normal curves totally tangent to a Hermitian variety, 2012. preprint, arXiv:1203.4047, to appear in Des. Codes Cryptogr.

[5] Ichiro Shimada. Projective models of the supersingular $K3$ surface with Artin invariant 1 in characteristic 5, 2012. preprint, arXiv:1201.4533.

`shimada@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`