

LATTICES OF ALGEBRAIC CYCLES ON FERMAT  
VARIETIES IN POSITIVE CHARACTERISTICS

北大・理 島田伊知朗 (Ichiro SHIMADA)

## 1 序

代数曲面上の因子のなす加群の上に交点形式から定まる対称 2 次形式を入れることにより、多くの興味深い格子が得られる。古典的によく知られているのは、複素数体上定義された非特異 3 次曲面  $S \subset \mathbb{P}^3$  の場合である。  $S$  上の 27 本の直線  $l_i$  のコホモロジー類  $[l_i] \in H^2(S; \mathbb{Z})$  を考える。  $[l_i] - [l_j]$  により生成される  $H^2(S; \mathbb{Z})$  の部分加群を  $M$  とし、  $H^2(S; \mathbb{Z})$  上のカップ積の  $M$  への制限を  $\phi: M \times M \rightarrow \mathbb{Z}$  とすると、  $(M, -\phi)$  は  $E_6$  型のルート格子になる [8]。塩田徹治氏および Elkies による Mordell-Weil 格子の理論を用いると、正標数の体上定義された楕円曲面を考えることにより高い充填密度をもつ格子が数多く構成される ([5], [14])。

我々は、この代数曲面と格子理論との関係を高次元に拡張することを試みた。  $\bar{k}$  を標数  $p > 0$  の代数閉体とし、  $X := X_{q+1}^{2m}$  を  $\bar{k}$  上定義された  $2m$  次元  $q+1$  次のフェルマー超曲面とする：

$$X := \{x_0^{q+1} + \cdots + x_{2m+1}^{q+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{2m+1}.$$

ここで  $q$  は  $p$  の冪である。  $X$  は有限体  $\mathbb{F}_q$  上のエルミート形式の零点集合として得られる超曲面であり、  $PSU_{2m+2}(q)$  が射影的自己同型群として自然に作用する。  $\Sigma^m(X)$  を  $X$  に含まれる  $m$  次元線形空間の集合とする。  $\Sigma^m(X)$  は

$$\prod_{\nu=0}^m (q^{2\nu+1} + 1)$$

個の元からなる。  $\Pi, \Pi' \in \Sigma^m(X)$  とすると、  $\Pi$  と  $\Pi'$  の交点数は

$$\Pi \cdot \Pi' = \theta(\nu) := \frac{1 - (-q)^{\nu+1}}{1 + q}, \quad \text{where } \nu := \dim(\Pi \cap \Pi') \quad (1)$$

により与えられる ([6, p. 102])。 ( $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$  のときは  $\dim(\Pi \cap \Pi') = -1$  と置く。)  $\widetilde{NL}$  を  $\Sigma^m(X)$  の元を基底とする自由  $\mathbb{Z}$  加群とし、  $\phi: \widetilde{NL} \rightarrow \text{Hom}(\widetilde{NL}, \mathbb{Z})$  を式 (1) により与えられる準同型とする。このとき、  $NL := \widetilde{NL} / \text{Ker } \phi$  は  $[\Pi] := \Pi \bmod \text{Ker } \phi$  で生成され、

$$([\Pi], [\Pi']) = \theta(\nu), \quad \text{where } \nu := \dim(\Pi \cap \Pi')$$

なる交叉形式をもつ偶格子となる。

定理 1.1 (1)  $\Pi$  にそのコホモロジー類を対応させることにより得られる準同型  $\widetilde{NL} \rightarrow H^{2m}(X; \mathbb{Q}_l)$  は同型  $NL \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \cong H^{2m}(X; \mathbb{Q}_l)$  を引き起こす．特に  $NL$  のランクは  $X$  の中間次元のベッチ数

$$b_{2m}(X) = 2 + (q^{2m+2} - 1) / (q + 1)$$

に等しい．

(2)  $NL$  の符号は,  $m$  が偶数のとき  $(b_{2m}(X), 0)$ , 奇数のとき  $(1, b_{2m}(X) - 1)$  である．

(3)  $NL$  のディスキリミナントは  $p$  の冪である．

$h \in H^{2m}(X; \mathbb{Q}_l)$  を  $X$  と  $m+1$  次元線形空間の交叉として得られる代数的サイクルのコホモロジー類とし,  $H_{prim}^{2m}(X; \mathbb{Q}_l)$  を  $h$  の (カップ積に関する) 直交補空間とする．上記の定理 (1) により,  $NL$  は  $H^{2m}(X; \mathbb{Q}_l)$  の部分  $\mathbb{Z}$  加群とすることができる． $NL_{prim} := NL \cap H_{prim}^{2m}(X; \mathbb{Q}_l)$  とおく．任意の  $\Pi \in \Sigma^m(X)$  に対し  $\Pi$  のコホモロジー類と  $h$  のカップ積は 1 であるから,  $\eta: \widetilde{NL} \rightarrow \mathbb{Z}$  をすべての  $\Pi$  に対して  $\eta(\Pi) = 1$  となる準同型とし,

$$NL_{prim} = \text{Ker } \eta / (\text{Ker } \eta \cap \text{Ker } \phi)$$

と定義しても同じことである． $h \cdot h = q + 1 > 0$  であるから定理 1.1 により次を得る．

系 1.2  $(-1)^m NL_{prim}$  はランク  $b_{2m}(X) - 1$  の正定値符号偶格子であり, そのディスキリミナントは  $(p \text{ の冪}) \times (q + 1)$  の形をしている．

我々はこの格子  $(-1)^m NL_{prim}$  の構造を,  $p = q = 2$  の場合, すなわち標数 2 の体上定義された 3 次フェルマー超曲面の場合に詳しく調べた．以下, この節では  $p = q = 2$  とし,

$$\mathcal{L}^m := (-1)^m NL_{prim}$$

と置く． $\mathcal{L}^1$  は  $E_6$  型のルート格子と同型になることが容易に確かめられる: すなわち複素数体上定義された非特異 3 次曲面の場合と変わらない．従って,  $\mathcal{L}^m$  はルート格子  $E_6$  の一般化とみなすことができる． $\mathcal{L}^m$  は有限環  $\mathbb{Z}/(2^{m+1})$  上のあるコードを使って構成される格子  $L^m$  と同型になる (定義 3.2, 定理 3.3)．格子  $L^m$  の記述と同型  $\mathcal{L}^m \cong L^m$  の構成は §3 で与えることにし, ここではこの記述を使って得られる結果を述べよう．

命題 1.3  $\mathcal{L}^2$  はランク 22 の圧着格子  $\Lambda_{22}$  と同型である．特にそのディスキリミナントは 12, 最短ベクトルのノルムは 4, 最短ベクトルの個数は 49896 である．

圧着格子 (laminated lattice)  $\Lambda_{22}$  は Leech 格子の部分格子であり, Conway 群の部分群  $\cdot 222$  が自然に作用する．(圧着格子の定義は [2, Chapter 6] を, また Conway 群とその部分群については [2, Chapter 10] を参照されたい．) 一方  $\mathcal{L}^2$  にはフェルマー超曲面の射影的自己同

型群  $PSU_6(2)$  が作用する．従って命題 1.3 は Conway の同型  $\cdot 222 \cong PSU_6(2)$  ([2, Chapter 10, table 10.4]) の幾何学的説明を与えると思われる<sup>1</sup>．Edge は [4] において  $\cdot 222 \cong PSU_6(2)$  がフェルマー超曲面を用いて幾何学的に証明されるであろうと述べ、いくつかの数値的状況証拠を提出している．Jónsson と McKay は [7] において、この数値的証拠を手がかりに Mathieu 群  $M_{22}$  の  $PSU_6(2)$  への表現を構成してみた．

命題 1.4  $\mathcal{L}^3$  はランク  $r = 86$ ，ディスクリiminant  $d = 2^{16} \cdot 3$ ，最短ベクトルのノルム  $N_{min} = 8$ ，最短ベクトルの個数 109421928 の格子である．

特に  $\mathcal{L}^3$  の正規化された中心密度  $d^{-1/2} \cdot (N_{min}/4)^{r/2}$  は  $2^{35}/\sqrt{3} = 2^{34.2075\dots}$  となる．これは rank = 86 における Minkowski-Hlawka の下限 ([2, Chapter 1] 参照)

$$\zeta(86) \cdot 2^{-85} \cdot V_{86}^{-1} = 2^{19.3208\dots}$$

より大きい．命題 1.4 は計算機を使って証明した．

$m = 1, 2, 3$  の場合の結果より、次の問題が自然にわきおこる．

問題 1.5 (1)  $\mathcal{L}^m$  の最短ベクトルのノルムは  $2^m$  か？

(2)  $\mathcal{L}^m$  の最短ベクトルの個数は、集合

$$\{ (\Pi, \Pi') ; \dim(\Pi \cap \Pi') = m - 2 \} \subset \Sigma^m(X) \times \Sigma^m(X)$$

の元の個数の  $1/6$  に等しいのではないか？

$\mathcal{L}^4$  のランクは 342 であり、 $m = 3$  の場合の腕力による方法は  $m = 4$  の時にすでに絶望的である．Mordell-Weil 格子の素晴らしい点の一つは、最短ベクトルのノルムが楕円曲面の幾何学的不変量を使って容易にわかることである ([14])．高次元の場合にも同様の結果が望まれる．

§2 において標数  $p > 0$  の体上定義された  $q + 1$  次のフェルマー超曲面とその上の線形部分空間の幾何学を解説し、定理 1.1 の証明の概略を述べる．§3 では  $p = q = 2$  の場合に、 $\mathcal{L}^m$  があるコードから構成される格子  $L^m$  と同型であることを解説する．この同型により、 $m$  が小さいときには  $\mathcal{L}^m$  の生成元や交叉行列を具体的に書き下すことが可能になる．§4 で同型  $L^2 \cong \Lambda_{22}$  を与える．証明の詳しい部分は [12] を参照されたい．

講演終了後、坂内英一氏から論文 [3] の存在を教えていただいた．この論文では群の表現を用いて  $(-1)^m NL_{prim}$  と同型な格子が構成されている．

<sup>1</sup>筆者はまだきちんと確かめていない．

## 2 フェルマー超曲面の幾何

標数  $p > 0$  の代数閉体  $\bar{k}$  上で定義された  $q+1$  次のフェルマー超曲面  $X_{q+1}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$  は正標数に特有のおもしろい性質を数多くもっている.

(1) 単有理性:  $\mathbb{P}^{n-1}$  から  $X_{q+1}^{n-1}$  への純非分離的で dominant な有理写像が存在する ([10], [11], [13]). すなわち,  $X_{q+1}^{n-1}$  の有理関数体の純非分離拡大で  $\bar{k}$  上純超越拡大となっているものが存在する.

(2) 超特異性:  $n-1 = 2m$  のとき,  $H^{2m}(X_{q+1}^{2m}; \mathbb{Q}_l)$  は代数的サイクルのコホモロジー類で生成される ([13], [15]). 我々の定理 1.1 は, 単に代数的サイクルというだけでなく, 線形部分空間のコホモロジー類で生成されるということ, さらに代数的サイクルの数値的同値類のなす加群のなかで, 線形部分空間の数値的同値類が生成する部分群の指数が有限であり, その指数が  $p$  の冪となることまで述べている.

(3) 代数閉体上で定義された  $\mathbb{P}^n$  の非特異超曲面  $X$  が次の性質をもつとする:  $X$  の非特異超平面切断はお互いに射影同型である. このとき  $X$  は 2 次超曲面であるか, あるいは標数  $p > 0$  の体上で定義された  $q+1$  次のフェルマー超曲面と射影同型である ([1]).

(4) 代数閉体上で定義された  $\mathbb{P}^n$  の非特異超曲面  $X$  の双対超曲面  $X^\vee$  が非特異であるとする. このとき  $X$  は 2 次超曲面であるか, あるいは標数  $p > 0$  の体上で定義された  $q+1$  次のフェルマー超曲面と射影同型である ([9]).

以上のことから  $X_{q+1}^{n-1}$  は 2 次超曲面と非常に近い性質をもっていることがわかる. そこで次のような超曲面のクラスを導入する.

以下, 素数  $p$  およびその冪  $q$  を固定する.  $k$  を  $q^2$  個の元からなる有限体,  $\bar{k}$  をその代数閉包とする.  $\bar{k}$  の元を成分とする行列  $M$  に対し,  $M^{(q)}$  で  $M$  の各成分を  $q$  乗して得られる行列を表わす.

定義 2.1  $A = (a_{ij})$  を  $\bar{k}$  の元を成分とする  $(n+1)$  次正方形行列とする.  $q+1$  次同次方程式

$${}^t \mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{x}^{(q)} = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j^q = 0$$

により定義される  $\mathbb{P}^n$  の超曲面を  $X_A$  と書く. ある  $A$  により  $X_A$  と表わされる超曲面を  $q$ -quadric という.

$X_I$  は  $q+1$  次のフェルマー超曲面に他ならない.  $X_A$  が非特異であるための必要十分条件は  $\det A \neq 0$  である. 超曲面が  $q$ -quadric であるという性質は  $\mathbb{P}^n$  の座標系のとりかたによらない. なぜなら  $g \in GL_{n+1}(\bar{k})$  に対し,  $g^{-1}(X_A) = X_{{}^t g A g^{(q)}}$  が成立するからである. 従って,

$q + 1$  次のフェルマー超曲面と射影同型になる超曲面はすべて  $q$ -quadric である．じつはこの逆も成立する．

**命題 2.2**  $\mathbb{P}^n$  の超曲面  $X$  が  $q + 1$  次のフェルマー超曲面  $X_I$  と射影同型になるための必要十分条件は，ある  $A \in GL_{n+1}(\bar{k})$  が存在して  $X = X_A$  となることである．

従って， $q + 1$  次のフェルマー超曲面  $X_I$  の幾何を調べるにあたっては，かわりに都合のよい定義方程式をもった別の非特異  $q$ -quadric 超曲面を調べてもよいことがわかる．

以下， $X_A$  を  $q$ -quadric 超曲面とする． $a \in X_A$  とする． $(z_1, \dots, z_n)$  を  $a$  を原点とする  $\mathbb{P}^n$  のアフィン座標系とする． $a$  の近傍において  $X_A$  は

$$l(z) + \lambda(z)^q + (q + 1) \text{ 次の同次式} = 0 \quad (l, \lambda \text{ は同次 1 次式})$$

なる形の方程式で定義される． $l = 0$  で定義される超平面は  $X_A$  の  $a$  における接平面  $T_a(X_A)$  に他ならない． $\lambda = 0$  により定義される  $\mathbb{P}^n$  の超平面を  $T_a^{(q)}(X_A)$  と書く． $T_a^{(q)}(X_A)$  は座標系のとりかたによらない：すなわち  $\mathbb{P}^n$  の線形自己同型  $\gamma$  に対し  $T_{\gamma(a)}^{(q)}(\gamma(X_A)) = \gamma(T_a^{(q)}(X_A))$  が成立する．

**定義 2.3**  $a \in X_A$  が  $X_A$  の special point であるとは  $T_a(X_A) = T_a^{(q)}(X_A)$  が成立することである． $X_A$  に含まれる線形部分空間  $L$  が special であるとは， $L$  が special points により張られていることである．

**命題 2.4**  $n = 2m + 1$  であり  $X_A$  が非特異なら， $X_A$  に含まれる任意の  $m$  次元線形空間は special である．また， $X_A$  は次元が  $m + 1$  以上の線形部分空間を含まない．

$X_A$  に含まれる special な  $l$  次元線形部分空間の集合を  $\Sigma^l(X_A)$  により表わす．空集合も  $-1$  次元の special な線形部分空間とみなす． $X_A$  が非特異なら， $X_A$  の射影的自己同型全体のなす群  $\text{Aut}(X_A)$  は  $\text{Aut}(X_I) = PSU_{n+1}(q)$  と同型になる．さらに， $\text{Aut}(X_A)$  は集合  $\Sigma^l(X_A)$  に自然に作用する．

**命題 2.5**  $X_A$  が非特異なら，各  $l$  に対し  $\text{Aut}(X_A)$  の  $\Sigma^l(X_A)$  への作用は推移的である．

**定義 2.6**  $A$  を有限体  $k$  の元を成分とする  $(n + 1)$  次のエルミート行列とする．すなわち  $A$  は  ${}^t A = A^{(q)}$  をみたすとする．このような  $A$  により  $X_A$  とあらわされる超曲面をエルミート超曲面といい， $\text{rank}(A)$  をエルミート超曲面のランクという．

エルミート超曲面は体  $k$  上定義されているのでその上の  $k$ -有理点が定義される． $k$  上定義された  $\mathbb{P}^n$  の超曲面がエルミートであるという性質は座標系の選び方に依存しない：すなわ

ち,  $X_A$  をエルミート超曲面とし  $\gamma$  を  $k$  上定義された  $\mathbb{P}^n$  の線形自己同型とすると,  $\gamma(X_A)$  もエルミート超曲面となり, しかも  $X_A$  と  $\gamma(X_A)$  のランクは等しい.  $A$  がゼロ行列のときは  $X_A = \mathbb{P}^n$  となる. これもランク 0 のエルミート超曲面とみなす.

命題 2.7 非特異なエルミート超曲面に含まれる線形部分空間  $L$  が special であるための必要十分条件は,  $L$  が  $k$ -有理的であることである.

この命題により,  $X_A$  が非特異なら二つの special な線形部分空間の共通部分が再び special になること, 従って合併集合  $\Sigma(X_A) := \cup_l \Sigma^l(X_A)$  が有限 poset の構造をもつこと, がただちにわかる. この poset の構造を  $\dim X_A$  についての帰納法を用いて詳しく調べることににより  $\Sigma^m(X_A)$  のコンフィギュレーションについて次のことがわかる.

定理 2.8  $n-1 = 2m$  とし,  $X_A$  を  $2m$  次元の非特異な  $q$ -quadric 超曲面とする.

- (1) 任意の  $H \in \Sigma^{m-1}(X_A)$  に対し,  $\Sigma^m(X_A)$  の元で  $H$  を含むもの全体のなす集合  $B_A(H)$  は  $q+1$  個の元からなる.
- (2) 任意の  $H \in \Sigma^{m-1}(X_A)$  および  $\Pi \in \Sigma^m(X_A)$  に対し,  $B_A(H)$  の元  $\beta_A(\Pi, H)$  で

$$\dim(\beta_A(\Pi, H) \cap \Pi) = \dim(H \cap \Pi) + 1$$

なるものが唯一つ存在し,  $\Pi' \in B_A(H)$  が  $\Pi' \neq \beta_A(\Pi, H)$  なら,

$$\dim(\Pi' \cap \Pi) = \dim(H \cap \Pi)$$

となる.

- (3)  $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$  をお互いに相異なる  $\Sigma^m(X_A)$  の元で  $\dim(\Pi_0 \cap \Pi_1) = \dim(\Pi_0 \cap \Pi_2) = m-1$  が成立しているとする. このとき

$$\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \begin{cases} m-2 & \text{if } \Pi_0 \cap \Pi_1 \neq \Pi_0 \cap \Pi_2 \\ m-1 & \text{if } \Pi_0 \cap \Pi_1 = \Pi_0 \cap \Pi_2 \end{cases}$$

が成立する.

以上の準備のもとで, 定理 1.1 の証明の概略を示すことができる.  $\mathbb{P}^{2m+1}$  の同次座標系  $(x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_m)$  をとり, フェルマー超曲面  $X_I$  のかわりにそれと射影同型である非特異エルミート超曲面

$$X_J := \left\{ \sum_{i=0}^m (x_i y_i^q - x_i^q y_i) = 0 \right\}$$

を考える.  $X_J$  には次の二つの  $m$  次元線形部分空間が含まれている.

$$M_0 := \{ y_0 = \dots = y_m = 0 \}, \quad M_\infty := \{ x_0 = \dots = x_m = 0 \}. \quad (2)$$

命題 2.7 より,  $\Sigma^{m-1}(X_J)$  の元で  $M_0$  に含まれるもの全体のなす集合は,  $M_0$  の  $k$ -有理的な超平面全体のなす集合  $M_0^\vee(k)$  と同一視できる. ここで  $M_0^\vee$  は  $M_0$  の双対射影空間である. 定理 2.8 より, 各  $H \in M_0^\vee(k)$  に対し,  $\Pi \cap M_0 = H$  かつ  $\Pi \cap M_\infty = \emptyset$  なる  $\Pi \in \Sigma^m(X_J)$  が  $q-1$  個存在する.

$$\Omega := \{ \Pi \in \Sigma^m(X_J) ; \dim(\Pi \cap M_0) = m-1, \Pi \cap M_\infty = \emptyset \}$$

とおく.  $\dim(M' \cap M_0) = m-1, \dim(M' \cap M_\infty) = 0$  となる  $M' \in \Sigma^m(X_J)$  をひとつ選ぶ.  $\tilde{\Omega} := \Omega \cup \{M', M_0\}$  とすると

$$|\tilde{\Omega}| = (q-1) \cdot |M_0^\vee(k)| + 2 = b_{2m}(X_J)$$

となることに注意する. 定理 2.8 と式 (1) より, 交点数のなす対称行列  $(\Pi, \Pi')_{\Pi, \Pi' \in \tilde{\Omega}}$  を書き下すことができる. この行列は非退化で, 符号は定理 1.1(2) で与えたものと一致し, 行列式の値は  $p$  の冪であることがわかる. よって  $[\Pi]$  ( $\Pi \in \tilde{\Omega}$ ) で生成される  $NL$  の部分加群  $NL'$  は定理 1.1 の結論をみたす. 従って,  $NL'$  は  $NL$  の指数有限の部分加群となり,  $NL$  も定理 1.1 の結論をみたす.

### 3 コードによる構成

以後,  $p = q = 2$  とする.  $k$  は 4 個の元からなる有限体になる.

集合  $S$  および可換環  $R$  に対し  $R^S$  で  $S$  から  $R$  への写像全体のなす  $R$  加群を表わす.

$T$  を  $k$  上で定義された  $m$  次元射影空間  $\mathbb{P}^m$  の  $k$ -有理点全体のなす集合とする.  $T$  の部分集合  $S$  に対し,  $S$  上で 1,  $T \setminus S$  上で 0 となる  $T$  から  $\mathbb{F}_2$  への写像を対応させることにより,  $T$  の部分集合全体のなす集合  $2^T$  を  $\mathbb{F}_2^T$  と同一視する. この同一視により,  $2^T$  には加法

$$S_1 + S_2 = (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2) \quad (S_1, S_2 \subset T)$$

が定義される.  $k$  の元を成分とする  $(m+1)$  次のエルミート行列  $A = (a_{ij})$  に対し

$$\sum_{i,j=0}^m a_{ij} x_i x_j^2 = 0$$

で定義される  $\mathbb{P}^m$  のエルミート超曲面を  $Y_A$  とし,  $Y_A(k) \subset T$  を  $Y_A$  の  $k$ -有理点全体のなす  $T$  の部分集合とする.

定義 3.1  $\mathcal{H}_m$  を  $Y_A(k)$  により生成される  $\mathbb{F}_2^T$  の部分空間とする. ここで  $A$  は  $(m+1)$  次のエルミート行列全体を走る.

任意のエルミート行列  $A, B$  に対し

$$Y_A(k) + Y_B(k) = T + Y_{A+B}(k)$$

であることがわかる．従って， $\mathcal{H}_m$  は  $\mathbb{F}_2$  上  $(m+1)^2 + 1$  次元のコードであることがわかる．  
ランク  $r$  を固定したときの  $(m-1)$  次元エルミート超曲面の個数  $h(m, r)$  は

$$h(m, r) = \frac{1}{q-1} \cdot q^{(r-1)r/2} \cdot \prod_{j=1}^r \left( \frac{q^{2(m+1-r)+2j} - 1}{q^j - (-1)^j} \right)$$

であり，およびエルミート超面上の  $k$ -有理点の個数  $F(m, r)$  は

$$F(m, r) = \frac{q^{2m-2r+2} - 1}{q^2 - 1} + q^{2m-2r+1} \cdot \left( \frac{q^{2r} - 1}{q^2 - 1} + \frac{(-q)^r - 1}{q + 1} \right)$$

である．従って， $\mathcal{H}_m$  の重み分布多項式

$$w(m) := \sum_{S \in \mathcal{H}_m} z^{|S|} = \sum_{r=0}^{m+1} h(m, r) \cdot (z^{F(m, r)} + z^{|T| - F(m, r)})$$

も求めることができる． $m$  が小さいときの重み分布多項式は以下ようになる：

$$\begin{aligned} w(1) &:= z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1, \\ w(2) &:= z^{21} + 21z^{16} + 210z^{13} + 280z^{12} + 280z^9 + 210z^8 + 21z^5 + 1, \\ w(3) &:= z^{85} + 85z^{64} + 3570z^{53} + 23800z^{48} + 38080z^{45} + \\ &\quad 38080z^{40} + 23800z^{37} + 3570z^{32} + 85z^{21} + 1. \end{aligned}$$

$R$  を有限環  $\mathbb{Z}/(2^{m+1})$  とする． $S \subset T$  に対し  $\bar{V}_S \in R^T$  を

$$\bar{V}_S(H) := \begin{cases} 1 & \text{if } H \in S \\ 0 & \text{if } H \in T \setminus S \end{cases}$$

により定義する．形式的な元  $\varphi$  を一つ用意し， $\tilde{T} := T \cup \{\varphi\}$  とおく． $\bar{v} \in R^T$  の拡大  $\bar{v}^\sim \in R^{\tilde{T}}$  を， $\tilde{T}$  から  $R$  への写像で次をみたすものと定義する．

$$\bar{v}^\sim|_T = \bar{v}, \quad \bar{v}^\sim(\varphi) = \sum_{H \in T} \bar{v}(H).$$

$R^T$  の  $R$ -部分加群  $M$  にたいし， $M^\sim$  を  $\{\bar{v}^\sim; \bar{v} \in M\}$  と定義する． $M^\sim$  は明らかに  $M$  と同型な  $R^{\tilde{T}}$  の部分  $R$  加群となる．

**定義 3.2**  $\bar{L}^m$  を  $\bar{V}_T$  と  $2\bar{V}_S$  (ここで  $S$  は  $\mathcal{H}_m$  を走る) により生成された  $R^T$  の部分  $R$  加群とし， $(\bar{L}^m)^\sim$  をその拡大として得られる  $R^{\tilde{T}}$  の部分  $R$  加群とする． $L^m \subset \mathbb{Z}^{\tilde{T}}$  を  $(\bar{L}^m)^\sim$  の自然な準同型  $\mathbb{Z}^{\tilde{T}} \rightarrow R^{\tilde{T}}$  による引き戻しとする．



$\mathbb{Z}^{\tilde{T}}$  上に  $\mathbb{Q}$  に値をもつ対称正定値 2 次形式を

$$(v, w)_T := \frac{1}{2^{m+1}} \left( \sum_{H \in T} v(H)w(H) + 3v(\varphi)w(\varphi) \right) \quad (3)$$

により定義する．この内積は  $L^m$  上で整数値をとること，つまり  $L^m$  に式 (3) により内積をいれたものは格子となることがわかり，次が成立する．

**定理 3.3** 二つの格子  $L^m$  と  $\mathcal{L}^m$  は同型である．

$\mathcal{L}^m$  から  $L^m$  への同型を構成しよう．再びフェルマー超曲面のかわりにそれと射影同型である非特異エルミート超曲面  $X_J := \{ \sum_{i=0}^m (x_i y_i^2 - x_i^2 y_i) = 0 \}$  を考える． $M_0$  および  $M_\infty$  を式 (2) で定義された線形部分空間とする．各  $H \in M_0^\vee(k)$  に対し，定理 2.8 で考えた集合  $B_J(H) \subset \Sigma^m(X_J)$  は  $q+1 = 3$  個の元からなる．ひとつは  $M_0$  であり，もうひとつは  $\beta_J(H, M_\infty)$  である． $\Pi_H^+ := \beta_J(H, M_\infty)$  とおく．これは  $B_J(H)$  のなかで  $M_\infty$  と交わる唯一の元である．残りの一つを  $\Pi_H^-$  と書く．任意の  $\Pi \in \Sigma^m(X_J)$  に対し

$$C_0(\Pi) := \{ H \in M_0^\vee(k) ; \beta_J(H, \Pi) = M_0 \},$$

$$C_\infty(\Pi) := \{ H \in M_0^\vee(k) ; \beta_J(H, \Pi) = \Pi_H^+ \},$$

$$C_1(\Pi) := \{ H \in M_0^\vee(k) ; \beta_J(H, \Pi) = \Pi_H^- \}$$

と置く． $\beta_J(H, \Pi)$  の定義より

$$H \in C_0(\Pi) \iff \dim(\Pi \cap M_0) - 1 = \dim(\Pi \cap H) = \dim(\Pi \cap \Pi_H^+),$$

$$H \in C_\infty(\Pi) \iff \dim(\Pi \cap \Pi_H^+) - 1 = \dim(\Pi \cap H) = \dim(\Pi \cap M_0),$$

$$H \in C_1(\Pi) \iff \dim(\Pi \cap M_0) = \dim(\Pi \cap \Pi_H^+) = \dim(\Pi \cap H)$$

が成立する．

$$[\Pi] := [\Pi] - [M_0] \in \mathcal{L}^m$$

と置く． $\mathcal{L}^m$  は  $[\Pi]$  ( $\Pi \in \Sigma^m(X_J)$ ) で生成され， $\mathcal{L}^m$  における内積は

$$([\Pi], [\Pi'])_{\mathcal{L}} = (-1)^m (\theta(\dim(\Pi \cap \Pi')) - \theta(\dim(\Pi \cap M_0)) - \theta(\dim(\Pi' \cap M_0)) + \theta(m))$$

で与えられる． $T$  を  $M_0^\vee(k)$  と同一視する．写像  $u : \Sigma^m(X_J) \rightarrow \mathbb{Z}^{\tilde{T}}$  を

$$u(\Pi)(H) := \begin{cases} 0 & \text{if } H \in C_0(\Pi) \\ (-2)^{a+1} & \text{if } H \in C_\infty(\Pi) \\ -(-2)^{a+1} & \text{if } H \in C_1(\Pi) \end{cases},$$

$$u(\Pi)(\varphi) := -(-2)^{a+1} \theta(m - a - 1)$$

表 1: MOG

$\mu_1$	$\mu_5$	$\mu_9$	$\mu_{13}$	$\mu_{17}$	$\mu_{21}$
$\mu_2$	$\mu_6$	$\mu_{10}$	$\mu_{14}$	$\mu_{18}$	$\mu_{22}$
$\mu_3$	$\mu_7$	$\mu_{11}$	$\mu_{15}$	$\mu_{19}$	$\mu_{23}$
$\mu_4$	$\mu_8$	$\mu_{12}$	$\mu_{16}$	$\mu_{20}$	$\mu_{24}$

表 2: Definition of  $\gamma$

$(1 : \omega : 0)$	$(1 : \bar{\omega} : 0)$	$(1 : 1 : 0)$	$(1 : 0 : 0)$	$(0 : 1 : 0)$	$(0 : 0 : 1)$
$(1 : \omega : 1)$	$(1 : \bar{\omega} : 1)$	$(1 : 1 : 1)$	$(1 : 0 : 1)$	$(0 : 1 : 1)$	$\varphi$
$(1 : \omega : \omega)$	$(1 : \bar{\omega} : \omega)$	$(1 : 1 : \omega)$	$(1 : 0 : \omega)$	$(0 : 1 : \omega)$	$\varphi$
$(1 : \omega : \bar{\omega})$	$(1 : \bar{\omega} : \bar{\omega})$	$(1 : 1 : \bar{\omega})$	$(1 : 0 : \bar{\omega})$	$(0 : 1 : \bar{\omega})$	$\varphi$

により定義する．ここで  $a := \dim(\Pi \cap M_0)$  である．このとき任意の  $\Pi, \Pi'$  に対して

$$([\Pi], [\Pi'])_{\mathcal{L}} = (u(\Pi), u(\Pi'))_T$$

が成立することが確かめられる．従って， $u$  は内積を保つ準同型  $\tilde{u} : \mathcal{L}^m \rightarrow \mathbb{Z}^{\tilde{T}}$  を誘導する．この準同型の像が  $L^m$  であり， $\tilde{u}$  が求める格子の同型  $\mathcal{L}^m \cong L^m$  を与える．

## 4 Edge-Jónsson-McKay 同型

$m = 2$  として，同型  $L^2 \cong \Lambda_{22}$  を構成しよう．Miracle Octad Generator (MOG) に表 1 のようにラベル付けをする． $M := \{\mu_1, \dots, \mu_{24}\}$  と置き，写像  $\gamma : M \rightarrow \tilde{T} = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4) \cup \{\varphi\}$  を表 2 により与える．ここで  $\omega, \bar{\omega} \in \mathbb{F}_4$  は方程式  $x^2 + x + 1 = 0$  の二つの根である．Leech 格子  $\Lambda_{24}$  は

$$(v, w)_M := \frac{1}{8} \sum_{\mu \in M} v(\mu)w(\mu)$$

なる内積のはいった  $\mathbb{Z}^M$  の部分加群として実現される ([2, Chapter 11, Section 5]).  $\Lambda_{22}$  は  $a(\mu_{22}) = a(\mu_{23}) = a(\mu_{24})$  をみたく  $\Lambda_{24}$  の元  $a$  全体からなる  $\Lambda_{24}$  の部分格子である ([2, Chapter 6, Figure 6.2]) .  $\gamma$  は内積を保つ準同型  $\gamma^* : \mathbb{Z}^{\tilde{T}} \rightarrow \mathbb{Z}^M$  を誘導する．この準同型による  $L^2 \subset \mathbb{Z}^{\tilde{T}}$  の像が  $\Lambda_{22}$  と一致し，求める同型  $L^2 \cong \Lambda_{22}$  が得られる．

証明の鍵となるのは次の命題である．

命題 4.1 写像  $\gamma$  により引き起こされる準同型  $\mathbb{F}_2^{\tilde{T}} \rightarrow \mathbb{F}_2^M$  により  $\mathcal{H}_2$  は Golay コード  $\mathcal{C}_{24}$  の部分コード  $\{\alpha \in \mathcal{C}_{24}; \alpha(\mu_{22}) = \alpha(\mu_{23}) = \alpha(\mu_{24})\}$  と同型になる .

$p = q = 2, m = 2$  のとき  $\Sigma^2(X_I)$  は 891 個の元からなる .  $X_I$  と  $X_J$  の間の射影同型をひとつ選び , poset の同型  $\Sigma(X_I) \cong \Sigma(X_J)$  を固定する . このとき  $X_I$  の射影的自己同型のなす群  $PSU_6(2)$  は  $\Sigma^2(X_J)$  の上に置換群として推移的に作用する .  $u : \Sigma^2(X_J) \rightarrow L^2$  により , この作用は  $L^2$  の格子としての自己同型を誘導する . さらに同型  $\gamma^* : L^2 \cong \Lambda_{22}$  により ,  $PSU_6(2)$  は格子  $\Lambda_{22}$  の上に作用する . この準同型  $PSU_6(2) \rightarrow \text{Aut}(\Lambda_{22})$  が同型  $PSU_6(2) \cong \cdot 222$  を引き起こすと思われる .

## 参考文献

- [1] A. Beauville, ‘Sur les hypersurfaces dont les sections hyperplanes sont à module constant’, *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, (eds P. Cartier et al.), Progr. Math. 86 (Birkhäuser Boston, Boston, 1990), pp. 121–133.
- [2] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 290 (Springer, Berlin, 1993).
- [3] N. Dummigan and Pham Huu Tiep, ‘Lower bounds for the minima of certain symplectic and unitary group lattices’, *Amer. J. Math.* 121 (1999) 889–918.
- [4] W. L. Edge, ‘Permutation representations of a group of order 9, 196, 830, 720’, *J. London Math. Soc.* (2) 2 (1970) 753–762.
- [5] N. D. Elkies, ‘Mordell-Weil lattices in characteristic 2. I. Construction and first properties’, *Internat. Math. Res. Notices.* (1994) no. 8, 343 ff., approx. 18 pp. ‘Mordell-Weil lattices in characteristic 2. II. The Leech lattice as a Mordell-Weil lattice’, *Invent. Math.* 128 (1997) 1–8. (electronic).
- [6] W. Fulton, *Intersection theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 2 (Springer, Berlin, 1984).
- [7] W. Jónsson and J. McKay, ‘More about the Mathieu group  $M_{22}$ ’, *Canad. J. Math.* 38 (1976) 929–937.
- [8] Yu. I. Manin, *Cubic Forms* (North-Holland, Amsterdam, 1986).

- [9] A. Noma, ‘Hypersurfaces with smooth dual varieties’, *Amer. J. Math.* 117 (1995), no. 6, 1507–1515.
- [10] I. Shimada, ‘Unirationality of certain complete intersections in positive characteristics’. *Tôhoku Math. J. (2)* 44 (1992), no. 3, 379–393.
- [11] I. Shimada, ‘A generalization of Morin-Predonzan’s theorem on the unirationality of complete intersections’, *J. Algebraic Geom.* 4 (1995) 597–638.
- [12] I. Shimada, ‘Lattices of algebraic cycles on Fermat varieties in positive characteristics’, preprint, to appear in *Proc. London Math. Soc.*
- [13] T. Shioda and T. Katsura, ‘On Fermat varieties’, *Tôhoku Math. J.* 31 (1979) 97–115.
- [14] T. Shioda, ‘Mordell-Weil lattices and sphere packings’, *Amer. J. Math.* 113 (1991) 931–948.
- [15] J. T. Tate, ‘Algebraic cycles and poles of zeta functions’, *Arithmetical Algebraic Geometry* (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), (ed O. F. G. Schilling, Harper & Row, New York, 1965), pp. 93–110.

060-0810 札幌市北10条西8丁目  
北海道大学大学院理学研究科数学専攻  
shimada@math.sci.hokudai.ac.jp