The automorphism group of a supersingular $K3$ surface with Artin invariant 1 in characteristic 3 (joint work with Shigeyuki Kondo)

島田　伊知朗（広島大・理）

代数閉体上定義された $K3$ 曲面は Picard 数が 22 のとき,（Shioda の意味で）超特異であるといわれる．超特異 $K3$ 曲面は正標数においてのみ存在する．Y を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された超特異 $K3$ 曲面とし，S_Y を Y の Néron-Severi 格子とする．Artin [1] は，$1 \le \sigma \le 10$ を満たす自然数 σ が存在して，S_Y の discriminant group $S_Y^\vee / S_Y$ が階数 2σ の p-elementary なアーベル群となることを示した．この σ を Y の Artin 不変量という．Ogus [10, 11] は，各素数 p に対し，Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面が存在して，しかも同型を除き unique であることを示した（Rudakov-Shafarevichi [13] も参照）.

与えられた $K3$ 曲面の自己同型群を求めることは重要な問題である．Vinberg [16] は Néron-Severi 格子に付随した双曲空間の幾何学を利用して，2 つの Picard 数 20 の複素 $K3$ 曲面の自己同型群を決定した．金銅 [8] は Néron-Severi 格子を階数 26 の unimodular 双曲偶格子 L に埋め込み，Conway [4] および Borcherds [2, 3] による L の fundamental roots の記述を利用して generic な Jacobian Kummer 曲面の自己同型群を決定した．この方法は,

- Keum-金銅 [7] により，2 つの楕円曲線の直積から得られる Kummer 曲面に,
- Dolgachev-Keum [6] により Hessian 4 次曲面に,
- Dolgachev-金銅 [5] により，標数 2 における Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面に,

それぞれ適用された.

我々は標数 3 における Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面の自己同型群の生成元の集合を求めた．標数 3 における Fermat 4 次曲面

$$X := \{w^4 + x^4 + y^4 + z^4 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

は Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面となり，その Néron-Severi 格子 S_X は，X に含まれる 112 本の直線のクラスで生成される（Shioda [15] あるいは Mizukami [12] を参照）．X の超平面切断のクラスを

$$h_0 := [\mathcal{O}_X(1)] \in S_X$$

と書く．このとき X の射影的自己同型群 $\mathrm{Aut}(X, h_0)$ は，位数 $13,063,680$ の有限群 $\mathrm{PGU}_4(\mathbb{F}_9)$ である．$z=1$ とおき，$\mathbb{P}^3$ のアフィン座標 (w, x, y) を考える．Table 1 に記された，係数を

$$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(i) = \{0, \pm 1, \pm i, \pm(1+i), \pm(1-i)\}, \quad i := \sqrt{-1},$$

にもつ (w, x, y) の多項式 F_{1j}, F_{2j} を考える．

Proposition 1. $i=1$ および 2 に対し，有理写像

$$(w, x, y) \mapsto [F_{i0} : F_{i1} : F_{i2}] \in \mathbb{P}^2$$

は X から $\mathbb{P}^2$ への次数 2 の *generically finite* な射 ϕ_i を与える．

射 ϕ_i の Stein 分解を

$$X \longrightarrow Y_i \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{P}^2$$

とする．$B_i \subset \mathbb{P}^2$ を 2 重被覆 $\pi_i : Y_i \to \mathbb{P}^2$ の分岐曲線とする．正規曲面 Y_1 および Y_2 は ADE-特異点のみをもつ．$[x_0 : x_1 : x_2]$ を $\mathbb{P}^2$ の同次座標とする．

Proposition 2. (1) $\mathrm{Sing}(Y_1)$ の ADE-型は $6A_1 + 4A_2$ であり，分岐曲線 B_1 は $f_1 = 0$ で定義される．ここで

$$f_1 := {x_0}^6 + {x_0}^5 x_1 - {x_0}^3 {x_1}^3 - x_0 {x_1}^5 - {x_0}^4 {x_2}^2 + x_0 {x_1}^3 {x_2}^2 + {x_1}^4 {x_2}^2 + {x_0}^2 {x_2}^4 + {x_1}^2 {x_2}^4 + {x_2}^6.$$

(2) $\mathrm{Sing}(Y_2)$ の ADE-型は $A_1 + A_2 + 2A_3 + 2A_4$ であり，分岐曲線 B_2 は $f_2 = 0$ で定義される．ここで

$$f_2 := {x_0}^5 x_1 + {x_0}^2 {x_1}^4 - {x_0}^4 {x_2}^2 + x_0 {x_1}^3 {x_2}^2 + {x_1}^4 {x_2}^2 - {x_0}^2 {x_2}^4 - x_0 x_1 {x_2}^4 - {x_1}^2 {x_2}^4 - {x_2}^6.$$

我々の主結果は次である．

Theorem 3. 2 重被覆 $\pi_i : Y_i \to \mathbb{P}^2$ から定まる X の位数 2 の自己同型を g_i とする．このとき X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ は射影的自己同型群 $\mathrm{Aut}(X, h_0) = \mathrm{PGU}_4(\mathbb{F}_9)$ および g_1, g_2 により生成される．

g_1 は次のように明示的に記述される．

Theorem 4. *Table 2* に記された多項式

$$H_{1j}(w, x, y) = H_{1j0}(x, y) + H_{1j1}(x, y)w + H_{1j2}(x, y)w^2 + H_{1j3}(x, y)w^3$$

を考える．このとき

$$(w, x, y) \mapsto [H_{10} : H_{11} : H_{12} : H_{13}] \in \mathbb{P}^3$$

で与えられる有理写像は X の位数 2 の自己同型 g_1 を与える．

$$
\begin{aligned}
F_{10} = {} & (1+i) + (1+i)\,w + (1-i)\,x - y - (1-i)\,wx - x^2 + i\,wy + i\,xy - i\,y^2 + (1+i)\,w^3 - i\,w^2x \\
& + (1+i)\,wx^2 - i\,x^3 + w^2y + (1+i)\,wxy + (1+i)\,x^2y - (1-i)\,wy^2 - (1+i)\,xy^2 + i\,y^3 \\
F_{11} = {} & (1-i) - (1+i)\,x - (1-i)\,y - (1-i)\,w^2 - (1-i)\,wx - (1-i)\,x^2 - (1+i)\,wy - xy - (1+i)\,y^2 \\
& - w^3 + (1-i)\,w^2x + wx^2 - i\,x^3 - (1+i)\,w^2y - (1+i)\,wxy + x^2y - i\,wy^2 - xy^2 + (1-i)\,y^3 \\
F_{12} = {} & (1+i)\,w - i\,x - y - w^2 - wx - i\,x^2 - i\,xy + i\,y^2 + i\,w^3 \\
& - (1+i)\,wx^2 + i\,x^3 - i\,w^2y - wxy + (1-i)\,wy^2 + (1+i)\,y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{20} = {} & -1 - i\,w + (1+i)\,x - y - (1+i)\,w^2 - wx - (1-i)\,x^2 - i\,wy + (1+i)\,xy - (1-i)\,w^3 \\
& + w^2x - wx^2 + x^3 - w^2y + (1-i)\,wxy + x^2y + (1-i)\,wy^2 + (1-i)\,xy^2 + (1+i)\,y^3 \\
& - w^3x - i\,w^2x^2 - wx^3 + w^3y - (1+i)\,w^2xy - (1-i)\,wxy^2 + x^2y^2 - (1-i)\,wy^3 \\
& - (1+i)\,xy^3 - y^4 + (1-i)\,w^3x^2 - i\,x^5 + (1-i)\,w^3xy + (1+i)\,wx^3y - i\,w^3y^2 + (1+i)\,w^2xy^2 \\
& - (1+i)\,wx^2y^2 + i\,x^3y^2 - w^2y^3 - (1+i)\,wxy^3 - (1-i)\,x^2y^3 + i\,wy^4 + (1-i)\,xy^4 + (1+i)\,y^5 \\
F_{21} = {} & -(1-i) + i\,w + (1-i)\,y - (1+i)\,w^2 + wx + (1+i)\,x^2 + (1+i)\,wy - (1+i)\,xy - i\,y^2 - w^3 + i\,w^2x \\
& + (1+i)\,wx^2 - x^3 - (1+i)\,w^2y - (1-i)\,wxy - (1-i)\,x^2y - i\,wy^2 - (1+i)\,xy^2 + y^3 - (1-i)\,w^3x \\
& - wx^3 + (1-i)\,x^4 + (1-i)\,w^3y + i\,w^2xy + (1-i)\,wx^2y - i\,x^3y + (1-i)\,w^2y^2 + (1-i)\,wxy^2 \\
& - (1+i)\,x^2y^2 + (1-i)\,wy^3 - i\,xy^3 + i\,y^4 + w^3x^2 + w^2x^3 + (1-i)\,wx^4 - i\,x^5 - i\,w^3xy + w^2x^2y \\
& + (1+i)\,wx^3y + x^4y + w^3y^2 - w^2xy^2 - wx^2y^2 + i\,w^2y^3 + (1+i)\,wxy^3 - i\,wy^4 - i\,xy^4 + y^5 \\
F_{22} = {} & (1-i) - (1+i)\,w - (1+i)\,x - (1-i)\,y + i\,w^2 - (1+i)\,wx - (1-i)\,x^2 + i\,wy - (1+i)\,xy \\
& - w^3 - i\,w^2x - wx^2 + x^3 - (1-i)\,w^2y + wxy + x^2y + (1+i)\,wy^2 - (1+i)\,xy^2 - y^3 + i\,w^3x \\
& - (1-i)\,w^2x^2 - wx^3 - (1+i)\,x^4 + i\,w^3y + w^2xy + (1-i)\,wx^2y - (1-i)\,w^2y^2 + (1+i)\,wxy^2 \\
& + i\,wy^3 + xy^3 + (1-i)\,y^4 - i\,w^3x^2 - (1+i)\,wx^4 + x^5 - (1-i)\,w^3xy - i\,w^2x^2y + (1+i)\,wx^3y \\
& + (1-i)\,x^4y - w^3y^2 - (1+i)\,w^2xy^2 + i\,wx^2y^2 + i\,x^3y^2 - wxy^3 - (1-i)\,x^2y^3 - wy^4 - xy^4 - y^5
\end{aligned}
$$

表 1: Polynomials F_{1j} and F_{2j}

$$
\begin{aligned}
H_{100} = {} & -1 - (1-i)\,x - (1-i)\,x^2 - (1+i)\,y^2 - i\,x^3 - (1-i)\,xy^2 + x^4 - (1-i)\,x^3y \\
& + (1+i)\,x^2y^2 + (1+i)\,xy^3 - (1-i)\,y^4 - (1-i)\,x^5 + (1+i)\,x^4y - (1-i)\,x^3y^2 - i\,x^2y^3 \\
& - i\,xy^4 + i\,y^5 + i\,x^6 - x^5y - (1+i)\,x^4y^2 - (1+i)\,x^3y^3 + (1+i)\,xy^5 + (1-i)\,y^6 \\
H_{101} = {} & (1+i) + x + (1-i)\,y - i\,x^2 - (1+i)\,xy + i\,y^2 + i\,x^3 - x^2y - i\,xy^2 + y^3 + x^3y \\
& + (1-i)\,x^2y^2 - (1-i)\,xy^3 + (1-i)\,y^4 + x^5 + i\,x^4y + x^3y^2 - i\,x^2y^3 + (1-i)\,xy^4 - (1-i)\,y^5 \\
H_{102} = {} & i + x + (1+i)\,y + x^2 + (1+i)\,y^2 + (1+i)\,x^3 - x^2y - (1+i)\,xy^2 \\
& + i\,y^3 + (1+i)\,x^4 + (1-i)\,x^2y^2 + xy^3 + (1+i)\,y^4 \\
H_{103} = {} & (1-i) - (1-i)\,x + (1-i)\,y - (1+i)\,x^2 - (1-i)\,xy + (1+i)\,x^3 - (1+i)\,y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{110} = {} & -i + i\,x + y - (1+i)\,x^2 + xy - (1-i)\,y^2 - x^3 - (1-i)\,x^2y + (1+i)\,xy^2 - y^3 \\
& + (1+i)\,x^4 - i\,x^3y - (1-i)\,x^2y^2 + xy^3 + (1-i)\,y^4 - (1+i)\,x^5 + (1-i)\,x^4y + i\,x^2y^3 \\
& - (1+i)\,xy^4 - (1+i)\,y^5 - i\,x^6 + (1+i)\,x^4y^2 + (1+i)\,x^3y^3 + (1-i)\,xy^5 - (1-i)\,y^6 \\
H_{111} = {} & -(1-i) + x + (1+i)\,y - (1+i)\,x^2 - i\,xy - i\,y^2 + (1-i)\,x^3 - i\,x^2y - y^3 + (1+i)\,x^4 \\
& + (1-i)\,x^3y - x^2y^2 + (1+i)\,xy^3 - i\,y^4 + (1-i)\,x^5 + i\,x^4y + (1-i)\,x^2y^3 + (1-i)\,xy^4 - y^5 \\
H_{112} = {} & -1 + (1+i)\,y + x^2 - (1-i)\,xy - (1+i)\,y^2 - x^2y + (1+i)\,xy^2 \\
& - (1+i)\,y^3 + (1-i)\,x^4 + (1+i)\,x^3y - (1+i)\,x^2y^2 - xy^3 - (1+i)\,y^4 \\
H_{113} = {} & (1+i) - x + y + x^2 - i\,y^2 - (1-i)\,x^3 + i\,x^2y - (1-i)\,xy^2 - i\,y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{120} = {} & (1+i) + (1+i)\,x + (1+i)\,y + (1-i)\,x^2 + y^2 + (1+i)\,x^3 + (1+i)\,x^2y - i\,xy^2 - y^3 - (1-i)\,x^3y \\
& + (1-i)\,x^2y^2 - (1+i)\,xy^3 + (1-i)\,y^4 + (1-i)\,x^5 - i\,x^4y + (1-i)\,x^3y^2 - (1+i)\,x^2y^3 \\
& + i\,xy^4 - y^5 + x^6 - (1+i)\,x^5y - (1-i)\,x^4y^2 + x^3y^3 - i\,x^2y^4 - (1-i)\,xy^5 + (1-i)\,y^6 \\
H_{121} = {} & i + x + xy - (1+i)\,y^2 + x^3 - (1+i)\,x^2y - (1-i)\,xy^2 + (1+i)\,y^3 + x^4 - (1-i)\,x^3y \\
& - (1-i)\,x^2y^2 + (1+i)\,xy^3 - (1-i)\,y^4 - (1-i)\,x^5 + (1+i)\,x^3y^2 + (1+i)\,x^2y^3 + (1-i)\,y^5 \\
H_{122} = {} & (1-i) - x - (1+i)\,y + i\,x^2 - (1-i)\,xy - (1+i)\,y^2 - x^3 - (1-i)\,xy^2 \\
& - i\,y^3 - (1+i)\,x^4 - (1-i)\,x^3y - (1+i)\,x^2y^2 - xy^3 + (1+i)\,y^4 \\
H_{123} = {} & 1 - (1+i)\,x + (1-i)\,y + x^2 + i\,xy + i\,y^2 - (1+i)\,x^3 + (1-i)\,x^2y - (1+i)\,xy^2 + (1+i)\,y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{130} = {} & -(1-i) + i\,x + (1+i)\,y - (1+i)\,x^2 + (1-i)\,xy + (1-i)\,y^2 + x^3 - (1+i)\,x^2y + i\,xy^2 \\
& + i\,y^3 - (1+i)\,x^4 + i\,x^3y + x^2y^2 - (1+i)\,y^4 + (1+i)\,x^5 - (1-i)\,x^4y + (1-i)\,x^3y^2 - x^2y^3 \\
& - (1+i)\,y^5 - (1+i)\,x^6 - (1-i)\,x^5y - (1+i)\,x^4y^2 + i\,x^3y^3 + i\,x^2y^4 + i\,xy^5 + (1+i)\,y^6 \\
H_{131} = {} & -1 - x + (1+i)\,y - (1-i)\,x^2 + (1+i)\,xy - i\,y^2 - (1+i)\,x^3 - i\,x^2y - xy^2 + i\,y^3 \\
& - x^4 - x^3y + xy^3 - (1+i)\,y^4 - (1+i)\,x^5 + x^4y + (1-i)\,x^3y^2 - i\,x^2y^3 + (1+i)\,xy^4 \\
H_{132} = {} & (1+i) + i\,x + y - x^2 + xy + y^2 + i\,x^3 - (1-i)\,x^2y - (1+i)\,xy^2 - (1-i)\,x^4 - x^2y^2 - i\,xy^3 - (1-i)\,y^4 \\
H_{133} = {} & i - y + x^2 + (1+i)\,xy - (1-i)\,y^2
\end{aligned}
$$

表 2: Polynomials H_{1j}

位数 2 の自己同型 g_2 についても同様の記述があるが，多項式が巨大すぎるのでここに記載することはできない．

証明の概略は以下の通りである．

S_X は階数 26 の unimodular 双曲偶格子 L に埋め込みことができる．その直交補空間は $2A_2$ 型のルート格子となる．ローレンツ計量の入った空間 $S_X \otimes \mathbb{R}$ において

$$\{x \in S_X \otimes \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$$

は 2 つの連結成分をもつ．このうち h_0 を含むほうを $\mathcal{P}(X)$ と書く．我々は，$L \otimes \mathbb{R}$ における鏡映群の fundamental domain を $S \otimes \mathbb{R}$ に制限することにより，$\mathcal{P}(X)$ の closed chamber D_{S0} で次の性質を持つものを求めた．

1. D_{S0} は h_0 を内点に持つ．
2. D_{S0} は $\mathrm{Aut}(X, h_0)$ の作用で不変．
3. $v \in S_X$ が nef なら, ある $\gamma \in \mathrm{Aut}(X)$ が存在して $v^\gamma \in D_{S0}$.
4. $v, v' \in S_X$ が nef で，D_{S0} の interior に含まれているとする．このとき $v' = v^\gamma$ なる $\gamma \in \mathrm{Aut}(X)$ が存在するのは $v' = v^\tau$ なる $\tau \in \mathrm{Aut}(X, h_0)$ が存在するときに限る．

この chamber D_{S0} は $\mathcal{P}(X)$ において有限枚の超平面で bound されている．$\mathrm{Aut}(X, h_0)$ はこれらの超平面の集合の上に作用し，その軌道は 3 個ある．軌道を $o_{112}, o_{648}, o_{5184}$ と書くと，これらはそれぞれ 112, 648, 5184 枚の超平面を含む．軌道 o_{112} に含まれる超平面は X に含まれる 112 本の直線のクラスの直交補空間であり，したがって X の nef cone の境界ともなっている．位数 2 の自己同型 g_1, g_2 はそれぞれ，o_{648}, o_{5184} にふくまれる超平面 H_1, H_2 の反対側に D_{S0} を移す．

射 $\phi_1 : X \to \mathbb{P}^2$ および $\phi_2 : X \to \mathbb{P}^2$ を与える X の次数 2 の偏極は，超平面 H_1 および H_2 の上にあるノルム 2 のベクトルを網羅的に探索することにより発見した．S_X は 112 本の直線のクラスで生成されており，これらの直線の定義方程式は容易にわかる．偏極が S_X の元として与えられていれば，112 本の直線のクラスの線形和として書けるので，対応する直線束の大域切断の空間の基底を (w, x, y) の有理式の形に求めることができる．

証明の詳細は, プレプリント [9] を見ていただきたい．実際の計算においてはプレプリント [14] において開発した各種アルゴリズムと計算機プログラムを使用した．

参考文献

[1] M. Artin. Supersingular $K3$ surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7:543–567 (1975), 1974.

[2] Richard Borcherds. Automorphism groups of Lorentzian lattices. *J. Algebra*, 111(1):133–153, 1987.

[3] Richard E. Borcherds. Coxeter groups, Lorentzian lattices, and $K3$ surfaces. *Internat. Math. Res. Notices*, (19):1011–1031, 1998.

[4] J. H. Conway. The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice. *J. Algebra*, 80(1):159–163, 1983.

[5] I. Dolgachev and S. Kondō. A supersingular $K3$ surface in characteristic 2 and the Leech lattice. *Int. Math. Res. Not.*, (1):1–23, 2003.

[6] Igor Dolgachev and Jonghae Keum. Birational automorphisms of quartic Hessian surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(8):3031–3057 (electronic), 2002.

[7] Jonghae Keum and Shigeyuki Kondō. The automorphism groups of Kummer surfaces associated with the product of two elliptic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4):1469–1487 (electronic), 2001.

[8] Shigeyuki Kondō. The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface. *J. Algebraic Geom.*, 7(3):589–609, 1998.

[9] Shigeyuki Kondō and Ichiro Shimada. The automorphism group of a supersingular $K3$ surface with Artin invariant 1 in characteristic 3. 2012. To appear in Int. Math. Res. Not. arXiv:1205.6520.

[10] Arthur Ogus. Supersingular $K3$ crystals. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. II*, volume 64 of *Astérisque*, pages 3–86. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[11] Arthur Ogus. A crystalline Torelli theorem for supersingular $K3$ surfaces. In *Arithmetic and geometry, Vol. II*, volume 36 of *Progr. Math.*, pages 361–394. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[12] Mizukami, M. "Birational mappings from quartic surfaces to Kummer surfaces." *Master's Thesis at University of Tokyo*, 1975. in Japanese.

[13] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich. Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic. In *Current problems in mathematics, Vol. 18*, pages 115–207. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981. Reprinted in I. R. Shafarevich, Collected Mathematical Papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.

[14] Ichiro Shimada. Projective models of the supersingular $K3$ surface with Artin invariant 1 in characteristic 5. 2012. arXiv:1201.4533.

[15] Tetsuji Shioda. Supersingular $K3$ surfaces with big Artin invariant. *J. Reine Angew. Math.*, 381:205–210, 1987.

[16] È. B. Vinberg. The two most algebraic $K3$ surfaces. *Math. Ann.*, 265(1):1–21, 1983.

Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Hiroshima University,
1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima,
739-8526
`shimada@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`