Rational double points on supersingular $K3$ surfaces

北大 · 理　島田　伊知朗 (Ichiro SHIMADA)

代数閉体 k の上で考える．Y を normal な $K3$ 曲面とし，$f : X \to Y$ を minimal resolution とする．Y の特異点は有理 2 重点である ([1, 2, 4])．Y 上の有理 2 重点の ADE-型を $R_Y = \sum a_l A_l + \sum d_m D_m + \sum e_n E_n$ とし，全 Milnor 数 $\mu(Y)$ を

$$\mu(Y) := \sum a_l l + \sum d_m m + \sum e_n n$$

により定義する．すなわち，$\mu(Y)$ は f により一点につぶされる (-2)-曲線の本数である．これらの (-2)-曲線の classes は X の Picard 格子 S_X のなかで負定値の部分格子を生成するから，$\mu(Y)$ は S_X のランクよりも小さい．特に k の標数が 0 ならば $\mu(Y) \le 19$ である．一方，k が正標数ならば $\mu(Y) \ge 20$ となる例が存在する (Dolgachev-Kondo [6])．

我々は，全 Milnor 数が 21 となる $K3$ 曲面上の有理 2 重点の configurations をすべて分類した．応用として，Ito [9, 11, 12] の諸結果を拡張し，$K3$ 曲面上に入る extremal な (準) 楕円 fibrations の構造をすべて決定した．

1　主結果

ADE-型とは，A_l $(l \ge 1)$, D_m $(m \ge 4)$, E_n $(n = 6, 7, 8)$ の形式的な有限和のことである．ADE-型

$$R = \sum a_l A_l + \sum d_m D_m + \sum e_n E_n$$

に対し，そのランクを

$$\operatorname{rank}(R) := \sum a_l l + \sum d_m m + \sum e_n n$$

と定義する．

すべてのベクトルのノルムが偶数の格子を偶格子という．$Q(R)$ により，交叉行列が ADE-型 R をもつカルタン行列 (の符号を逆転させたもの) で与えられる負定値偶格子をあらわす．T を負定値な偶格子とする．$v^2 = -2$ となる $v \in T$ を T の root という．$\mathrm{Roots}(T)$ により T の roots 全体のなす集合をあらわし，T_{roots} により $\mathrm{Roots}(T)$ で生成される T の部分格子をあらわす．$\mathrm{Roots}(T)$ はタイプ ADE のルート系をなす ([5, 7])．その ADE-型を $\Sigma(T)$ と書く．すなわち，$\Sigma(T)$ は $T_{\mathrm{roots}} \cong Q(\Sigma(T))$ となる ADE-型である．

Y を全 Milnor 数が 21 の normal な $K3$ 曲面とし，R_Y を Y 上の有理 2 重点の ADE-型，$f : X \to Y$ を minimal resolusion とする．X は超特異 $K3$ 曲面になる．X の Picard 格子 S_X は符号 $(1, 21)$ の偶格子である．Artin [3] は，S_X の discriminant が $-p^{2\sigma_X}$ と書けることを示した．ここで，p は基礎体の標数であり，σ_X は $1 \le \sigma_X \le 10$ をみたす整数である．σ_X は X の Artin 不変量と呼ばれる．Artin [3], Rudakov-Shafarevich [17] および

Shioda [21] により，任意の素数 p および $1 \le \sigma \le 10$ をみたす整数 σ に対し，標数 p の体上定義された Artin 不変量 σ の超特異 $K3$ 曲面が存在することが示された．

f により一点につぶされる (-2)-曲線の classes が S_X のなかで生成する部分格子を T_f と書く．定義により，T_f は $Q(R_Y)$ と同型である．S_X における T_f の直交補空間 $T_f^{\perp}$ の生成元を h_Y とし，

$$n_Y := h_Y^2$$

とおくと，n_Y は正の偶数になる．

ランクが 21 の ADE-型 R，正の偶数 n，および $1 \le \sigma \le 10$ なる整数 σ のなす三つ組 (R, n, σ) を考える．

命題 1 三つ組 (R, n, σ) に対する次のふたつの条件は同値である．

(1) 標数 p において，全 Milnor 数 21 の normal $K3$ 曲面 Y で $(R_Y, n_Y, \sigma_X) = (R, n, \sigma)$ となるものが存在する．

(2) 標数 p における Artin 不変量 σ の任意の超特異 $K3$ 曲面 X は，(-2)-曲線の contraction $f : X \to Y$ で，$R_Y = R$, $n_Y = n$ となるものを持つ． □

定義 2 上記の条件を満たすとき，三つ組 (R, n, σ) は標数 p で実現可能であるという．

定理 3 標数 p で実現可能な三つ組のリストは，この論説の後ろの部分にある Table RDP で与えられる． □

系 4 全 Milnor 数 21 の normal $K3$ 曲面は，標数 $p \le 19$ のとき，およびそのときに限り存在する． □

全 Milnor 数 21 の normal $K3$ 曲面が存在すれば $p \le 19$ であることは，Goto [8] の結果からも従う．

このリストのなかで特に興味深いのは，標数 2 における 10 個の三つ組 $(21A_1, 2, \sigma)$ $(\sigma = 1, \dots, 10)$ である．Dolgachev-Kondo [6] において次の事実が指摘されている．標数 2 において，ある 6 次同次多項式 $G(x, y, z)$ により

$$w^2 = G(x, y, z)$$

で定義される normal な $K3$ 曲面 Y_G を考える．これは $\mathbb{P}^2$ の純非分離被覆だから，Y_G は超特異 $K3$ 曲面になる．$\Omega_{\mathbb{P}^2}(6)$ の大域切断 dG が 21 個の孤立した零点しかもたなければ，Y_G は $21A_1$ をもつ．(次数が 6 で標数が 2 だから，同次座標系をひとつ定めれば dG は well-defined である．) 特に G を general にとればこの条件は満たされる．Dolgachev-Kondo [6] は，Y_G の Artin 不変量が 1 となる 6 次同次多項式 $G(x, y, z)$ を構成した．また，G を general にとれば Y_G の Artin 不変量は 10 となることがわかる．標数 2 において，三つ組 $(21A_1, 2, \sigma)$ がすべての Artin 不変量 $\sigma = 1, \dots, 10$ に対して実現可能であることを用いて，次が証明される．

命題 5 標数 2 の任意の超特異 $K3$ 曲面 X に対し，ある 6 次同次多項式 G で次の性質を持つものが存在する．

(i) Y_G の特異点は $21A_1$．

(ii) 21 本の (-2)-曲線の contraction $X \to Y_G$ が存在する． $\square$

この命題は，標数 2 における超特異 $K3$ 曲面の単有理性 (Rudakov-Shafarevich [17]) の別証明を与える．

2 応用

X を $K3$ 曲面とする．次の二つの条件をみたす射 $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ を (準) 楕円 fibration という．

(i) ϕ の general fiber F は $p_a(F) = 1$ なる既約かつ被約な曲線である．

(ii) 切断 $O : \mathbb{P}^1 \to X$ が存在する．

F が非特異のとき ϕ は楕円 fibration であるといい，F が特異点を持つとき ϕ は準楕円 fibration であるという．準楕円 fibration は標数 2 および 3 においてしか存在しない．

(準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ の切断全体のなす集合は，O を単位元とする abel 群の構造をもつ．この群を ϕ の Mordell-Weil 群といい，MW_ϕ と記す．T_ϕ を，切断 O の像および $\phi(C)$ が一点となる既約曲線 C の classes で生成される S_X の部分格子とする．

定理 6 (Shioda [22], Ito [9]) Mordell-Weil 群 MW_ϕ は S_X/T_ϕ と同型である． $\square$

$\mathcal{R}_\phi$ により，$\phi^{-1}(v)$ が可約となる点 $v \in \mathbb{P}^1$ 全体の集合をあらわす．各 $v \in \mathcal{R}_\phi$ に対し，O と交わらない $\phi^{-1}(v)$ の既約成分の classes は S_X のなかで indecomposable な ADE-格子を生成する．その ADE-型を R_v とし，

$$R_\phi := \sum_{v \in \mathcal{R}_\phi} R_v$$

とおく．$\operatorname{rank}(R_\phi) \leq 20$ が成立する．

定義 7 ADE-型 R_ϕ のランクが 20 であるとき，(準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ は extremal であるという．

X が extremal な (準) 楕円 fibration ϕ をもてば，X は超特異 $K3$ 曲面であり，MW_ϕ は有限 abel 群となる．また，ϕ が準楕円 fibration なら ϕ は必然的に extremal となる．

ランクが 20 の ADE-型 R, $1 \leq \sigma \leq 10$ なる整数 σ, および有限 abel 群 MW からなる三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ を考える．

命題 8 三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ に対する次のふたつの条件は同値である．

(1) 標数 p において，ある $K3$ 曲面 X 上の楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ で $R_\phi = R$, $\sigma_X = \sigma$, $MW_\phi \cong MW$ となるものが存在する．

(2) 標数 p における Artin 不変量 σ の任意の超特異 $K3$ 曲面 X は，$R_\phi = R$ かつ $MW_\phi \cong MW$ となる楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ をもつ．

また，三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ に対する次のふたつの条件は同値である．

$(1)'$ 標数 p において，ある $K3$ 曲面 X 上の準楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ で $R_\phi = R$, $\sigma_X = \sigma$, $MW_\phi \cong MW$ となるものが存在する．

$(2)'$ 標数 p における Artin 不変量 σ の任意の超特異 $K3$ 曲面 X は，$R_\phi = R$ かつ $MW_\phi \cong MW$ となる準楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ をもつ． $\square$

定義 9 上記の条件 (1), (2) を満たすとき，三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ は標数 p における extremal な楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるという．また，上記の条件 $(1)'$, $(2)'$ を満たすとき，三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ は標数 p における extremal な準楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるという．

定理 10 extremal な楕円 $K3$ 曲面の三つ組のリストは，この論説の後ろの部分にある Table E で与えられる．また，extremal な準楕円 $K3$ 曲面の三つ組のリストは，Table QE で与えられる． $\square$

Table E および $p = 3$ に対する Table QE は，すでに Ito [9, 11, 12] により，別の方法で得られている．

3 証明

X を $K3$ 曲面，S_X をその Picard 格子とする．R を ADE-型とする．

命題 11 ([18]) $v^2 > 0$ をみたす $v \in S_X$ に対し，v をある nef line bundle の class に移す S_X の isometry が存在する． $\square$

命題 12 (Saint-Donat [19], Nikulin [15]) X が (-2)-曲線の contraction $f : X \to Y$ で $R_Y = R$ となるものをもつための必要十分条件は，X 上に $L^2 > 0$ かつ $\Sigma([L]^\perp) = R$ をみたす nef line bundle L が存在することである． $\square$

この 2 つの命題により，X のもつ (-2)-曲線の contractions は S_X の格子としての構造により完全に決定される．

命題 13 X が (-2)-曲線の contraction $f : X \to Y$ で $R_Y = R$ となるものをもつための必要十分条件は，$v^2 > 0$ かつ $\Sigma(v^\perp) = R$ をみたす $v \in S_X$ が存在することである． $\square$

同様に，Kondo [13] および Nishiyama [16] の補題を使うことにより次が示される．MW を有限 abel 群とする．

命題 14 X が $R_\phi = R$ かつ $MW_\phi \cong MW$ をみたす (準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ をもつための必要十分条件は，S_X がランク 2 の不定符号 unimodular な部分格子 U で $\Sigma(U^\perp) = R$ かつ $U^\perp / (U^\perp)_{\mathrm{roots}} \cong MW$ なるものをもつことである． $\square$

さて，つぎに超特異 $K3$ 曲面の Picard 格子の構造を調べよう．Λ を偶格子とし，その双対格子を $\Lambda^\vee$ とする．

$$G_\Lambda := \Lambda^\vee/\Lambda$$

を Λ の discriminant group という．G_Λ にはいる自然な 2 次形式

$$q_\Lambda : G_\Lambda \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$$

を Λ の discriminant form とよぶ．G_Λ が p-elementary であるとき，Λ は p-elementary であるという．2-elementary な偶格子 Λ が type I であるとは，任意の $v \in \Lambda^\vee$ が $v^2 \in \mathbb{Z}$ をみたすことである．

定理 15 (Artin [3], Rudakov-Shafarevich [18]) X を標数 p における超特異 $K3$ 曲面とし，その Artin 不変量を σ とする．このとき，S_X は符号 $(1, 21)$ の偶格子で，その discriminant group は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$ と同型である．さらに，$p = 2$ のときは，S_X は type I である． □

素数 p および $\sigma \le 10$ なる正整数 σ に対し，$\Lambda_{p,\sigma}$ を次の条件をみたすランク 22 の偶格子とする．

(a) 符号は $(1, 21)$.
(b) discriminant group は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$ と同型.

さらに，$p = 2$ のときは次の条件を課す.

(c) $\Lambda_{p,\sigma}$ は type I.

定理 16 (Rudakov-Shafarevich [18]) この 3 つの条件は，格子 $\Lambda_{p,\sigma}$ を同型を除いて unique に定める． □

以上をまとめて，次を得る．

系 17 三つ組 (R, n, σ) が標数 p で実現可能であるための必要十分条件は，primitive vector $h \in \Lambda_{p,\sigma}$ で $h^2 = n$ かつ $\Sigma(h^\perp) = R$ をみたすものが存在することである． □

系 18 三つ組 $\langle R, \sigma, MW\rangle$ が標数 p における extremal な (準) 楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるための必要十分条件は，$\Lambda_{p,\sigma}$ がランク 2 の不定符号 unimodular な部分格子 U で $\Sigma(U^\perp) = R$ かつ $U^\perp/(U^\perp)_{\mathrm{roots}} \cong MW$ なるものをもつことである． □

楕円 fibration と準楕円 fibration を区別するためには次の定理を用いればよい．

定理 19 (Rudakov-Shafarevich [18]) 標数 p は 2 または 3 であるとする．extremal な (準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ が準楕円 fibration であるための必要十分条件は，$Q(R_\phi)$ が p-elementary であることである． □

Λ を偶格子とする．$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda^\vee$ となる $\mathbb{Z}$-加群 Λ' で，$\Lambda^\vee$ 上の $\mathbb{Q}$-値双線形形式が Λ' 上 $\mathbb{Z}$ に値を持つとき，Λ' を Λ の overlattice という．

命題 20 (Nikulin [15]) 自然な射影 $\mathrm{pr} : \Lambda^\vee \to G_\Lambda$ から得られる対応

$$S \mapsto \Lambda_S := \mathrm{pr}^{-1}(S)$$

は，(G_Λ, q_Λ) の isotopic subgroups S の集合と Λ の偶である overlattices Λ_S の集合のあいだに全単射を引き起こす．Λ_S の discriminant group は $S^\perp/S$ と同型である． □

すなわち，Λ の even overlattices は有限 abel 群 G_Λ 上での有限回の計算によりすべて決定できる．

ランク 21 の ADE-型 R と正の偶数 n が与えられたとする．$I(n)$ を $e_n^2 = n$ なるベクトル e_n で生成されるランク 1 の格子とし，

$$Q(R,n) := Q(R) \oplus I(n)$$

とおく．$Q(R,n)$ の符号はもちろん $(1,21)$ である．

系 21 三つ組 (R,n,σ) が標数 p で実現可能となるための必要十分条件は，$Q(R,n)$ が次の性質を有する overlattice Λ をもつことである．

(i) Λ は $\Lambda_{p,\sigma}$ と同型である．つまり，Λ は条件 (b) と (c) を満たす偶格子である．

(ii) $e_n \in Q(R,n)$ は Λ においても primitive のままである．

(iii) $e_n^\perp$ に含まれる roots は，$\mathrm{Roots}(Q(R))$ と一致する．つまり，$Q(R,n)$ が Λ まで大きくなっても，$e_n^\perp$ に新しい roots はあらわれない． □

したがって，与えられた (R,n) と σ および p に対し，(R,n,σ) が標数 p で実現可能かどうかは有限回の計算で決定される．

$[R,n,p]$ の可能性は有限個しかない．

補題 22 $Q(R,n)$ の discriminant group $G_{Q(R,n)}$ が，$S^\perp/S \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$ なる isotopic subgroup S をもつとする．このとき，(n,p) は次の有限集合 $NP(R)$ に含まれる．

$$\{\ (n,p)\ \mid\ p \in P_R,\ \ 2n \mid (N_R \cdot p^2),\ \ p^2 \mid (n \cdot |G_{Q(R)}|)\ \ \text{and}\ \ \sqrt{n \cdot |G_{Q(R)}|} \in \mathbb{Z}\ \}.$$

ここで，P_R は $|\operatorname{disc} Q(R)| = |G_{Q(R)}|$ の素因子の集合であり，N_R はすべての $x \in G_{Q(R)}$ に対し $N_R \cdot q_{Q(R)}(x) = 0$ をみたす最小の正整数である． □

以上の準備のもとで Table RDP をつくるアルゴリズムを記述する．まず，集合

$$\mathcal{R} := \{\ [R,n,p]\ \mid\ \mathrm{rank}(R) = 21,\ \ (n,p) \in NP(R)\ \}$$

を計算する．これは 20169 個の三つ組からなる．各 $[R,n,p] \in \mathcal{R}$ に対し，$Q(R,n)$ の overlattice Λ をリストアップしていく．Λ が系 21 の条件 (i), (ii), (iii) をみたせば，(R,n,σ) を標数 p で実現可能な三つ組のリストにいれる．

Table E と Table QE をつくるには，系 18 の変形である次を用いる．

系 23 三つ組 $\langle R, \sigma, MW\rangle$ が標数 p における extremal な (準) 楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるための必要十分条件は，次をみたす $h, z \in \Lambda_{p,\sigma}$ が存在することである．

(i) $h^2=2$, $\Sigma(h^\perp)=R+A_1$, $z\in \mathrm{Roots}(h^\perp)$.
(ii) 任意の $r\in \mathrm{Roots}(h^\perp)\setminus\{\pm z\}$ にたいし $rz=0$.
(iii) $h-z$ は $\Lambda_{p,\sigma}$ において 2 でわりきれる.
(iv) $(h-z)/2$ と z で生成される部分格子 U は $MW\cong U^\perp/(U^\perp)_{\mathrm{roots}}$ を満たす.

特に,$\langle R,\sigma,MW\rangle$ が標数 p における extremal な (準) 楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるなら,$(R+A_1,2,\sigma)$ は標数 p で実現可能である. □

まず,ランク 20 の ADE-型 R で,$(R+A_1,2,\sigma)$ が Table RDP のなかにあるものをすべて選び出す.$z\in Q(R+A_1,2)$ を $R+A_1$ の A_1 に対応する root とする.また $h\in Q(R+A_1,2)$ を $e_2\in I(2)$ とする.$Q(R+A_1,2)$ の overlattice Λ で系 21 の条件 (i), (ii), (iii) をみたすものをリストアップしていく.Λ のなかで $h-z$ が 2 でわりきれれば,$MW\cong U^\perp/(U^\perp)_{\mathrm{roots}}$ により MW を計算し,$\langle R,\sigma,MW\rangle$ をリストに加える.

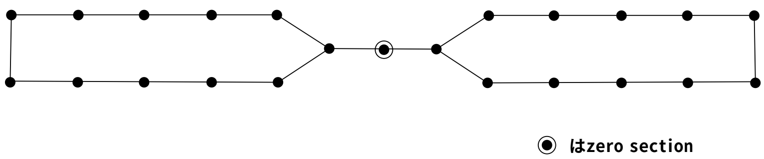
以上のアルゴリズムを実行するプログラムを C 言語で書き,Tables RDP, E, QE を得た.証明およびアルゴリズムの細部については,プレプリント [20] を参照されたい.

4 例

• 標数 11 で A_{21} をもつ超特異 $K3$ 曲面 (Artin 不変量は 1, n_Y は 22). Ito [11] により

$$y^2=x^3-3u^8x+2u$$

で定義される標数 11 の楕円 $K3$ 曲面は I_{11} 型のファイバーを 2 本 (と II 型を 1 本) もつことが示されている.この楕円 $K3$ 曲面は,したがって

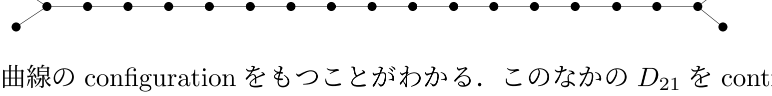


なる (-2)-曲線の configuration をもつ.このなかの A_{21} を contract すれば A_{21} をもつ超特異 $K3$ 曲面が得られる.

• 標数 2 で D_{21} をもつ超特異 $K3$ 曲面 (Artin 不変量は 1, n_Y は 4). Dolgachev-Kondo [6] によって

$$y^2=x^3+t^{11}$$

で定義される標数 2 の準楕円 $K3$ 曲面は D_{20} 型のファイバーを 1 本もつことが示されている.この準楕円 $K3$ 曲面は



なる (-2)-曲線の configuration をもつことがわかる.このなかの D_{21} を contract すれば D_{21} をもつ超特異 $K3$ 曲面が得られる.

Table RDP: The complete list of RDP-triples geometrically realizable in characteristics p

$p = 19$

R	n	σ
$A_{18} + A_3$	76	1

$p = 19$

R	n	σ
$A_{18} + A_2 + A_1$	114	1

$p = 17$

R	n	σ
$A_{16} + A_5$	102	1

$p = 17$

R	n	σ
$A_{16} + A_4 + A_1$	170	1
$A_{16} + A_3 + A_2$	204	1

$p = 13$

R	n	σ
$E_8 + A_{12} + A_1$	26	1
$E_7 + A_{12} + A_2$	78	1
$A_{12} + A_8 + A_1$	234	1

$p = 13$

R	n	σ
$A_{12} + A_7 + A_2$	312	1
$A_{12} + A_6 + A_3$	364	1
$A_{12} + A_4 + A_3 + A_2$	780	1

$p = 11$

R	n	σ
$E_8 + A_{10} + A_3$	44	1
$D_{11} + A_{10}$	44	1
$D_9 + A_{10} + A_2$	132	1
$D_7 + A_{10} + A_4$	220	1
A_{21}	22	1

$p = 11$

R	n	σ
$A_{11} + A_{10}$	132	1
$2A_{10} + A_1$	2	1
$A_{10} + A_8 + A_3$	396	1
$A_{10} + A_6 + A_5$	462	1
$A_{10} + A_6 + A_4 + A_1$	770	1

$p = 7$

R	n	σ
$E_8 + E_7 + A_6$	14	1
$E_8 + D_7 + A_6$	28	1
$E_8 + A_{13}$	14	1
$E_8 + A_7 + A_6$	56	1
$E_8 + 2A_6 + A_1$	2	1
$E_7 + A_{13} + A_1$	14	1
$E_7 + A_8 + A_6$	126	1
$E_7 + 2A_6 + A_2$	6	1
$E_6 + A_9 + A_6$	210	1
$E_6 + 2A_6 + A_3$	12	1
$D_{15} + A_6$	28	1
$D_{14} + A_6 + A_1$	14	1
$D_{12} + A_6 + A_3$	28	1
$D_9 + 2A_6$	4	1
$D_9 + A_6 + A_4 + A_2$	420	1
$D_8 + A_7 + A_6$	56	1
$D_7 + A_{13} + A_1$	28	1
$D_5 + A_{10} + A_6$	308	1

$p = 7$

R	n	σ
$D_5 + 2A_6 + A_4$	20	1
$A_{20} + A_1$	42	1
$A_{15} + A_6$	112	1
$A_{15} + A_6$	28	1
$A_{14} + A_6 + A_1$	210	1
$A_{13} + A_8$	126	1
$A_{13} + A_7 + A_1$	56	1
$A_{13} + A_6 + A_2$	6	1
$A_{13} + A_6 + 2A_1$	2	1
$A_{12} + A_6 + A_2 + A_1$	546	1
$A_{11} + A_6 + A_4$	420	1
$A_9 + 2A_6$	10	1
$A_9 + A_6 + A_5 + A_1$	210	1
$A_8 + A_7 + A_6$	504	1
$A_8 + 2A_6 + A_1$	18	1
$A_8 + A_6 + A_5 + A_2$	126	1
$3A_6 + A_2 + A_1$	42	$1, 2$
$2A_6 + A_5 + A_4$	30	1

$p=5$		
R	n	σ
$2E_8+A_4+A_1$	10	1
$E_8+D_7+A_4+A_2$	60	1
$E_8+A_9+A_4$	2	1
$E_8+A_9+A_3+A_1$	20	1
$E_8+A_6+A_4+A_3$	140	1
$E_8+3A_4+A_1$	10	$1,2$
$E_7+D_{10}+A_4$	10	1
$E_7+D_5+A_9$	20	1
E_7+A_{14}	30	1
$E_7+A_{10}+A_4$	110	1
$E_7+A_9+A_5$	30	1
$E_7+A_9+A_4+A_1$	2	1
$E_6+D_6+A_9$	30	1
$D_{16}+A_4+A_1$	10	1
$D_{15}+A_4+A_2$	60	1
$D_{12}+A_4+A_3+A_2$	60	1
$D_{11}+A_9+A_1$	20	1
$D_{11}+A_6+A_4$	140	1
$D_7+A_9+A_4+A_1$	4	1
$D_7+A_7+A_4+A_3$	40	1
$D_7+3A_4+A_2$	60	$1,2$
$D_6+A_{11}+A_4$	60	1
$D_6+A_9+A_6$	70	1
$D_6+A_9+A_4+A_2$	6	1
$D_5+A_{14}+A_2$	20	1

$p=5$		
R	n	σ
$A_{19}+A_2$	60	1
$A_{17}+A_4$	90	1
$A_{17}+A_4$	10	1
$A_{15}+A_4+A_2$	240	1
$A_{15}+A_4+A_2$	60	1
$A_{14}+A_7$	120	1
$A_{14}+A_5+A_2$	30	1
$A_{14}+A_4+A_3$	12	1
$A_{14}+A_4+A_2+A_1$	2	1
$A_{13}+A_4+A_3+A_1$	140	1
$A_{12}+A_9$	130	1
$A_{12}+A_5+A_4$	390	1
$A_{11}+A_4+2A_3$	60	1
$A_{10}+A_9+A_2$	330	1
$A_{10}+A_7+A_4$	440	1
$A_9+A_8+A_4$	18	1
$A_9+A_8+A_3+A_1$	180	1
$A_9+A_7+A_5$	120	1
$A_9+A_6+A_4+A_2$	42	1
$A_9+A_5+A_4+A_3$	12	1
A_9+3A_4	2	$1,2$
$A_9+2A_4+A_3+A_1$	20	$1,2$
$2A_8+A_4+A_1$	90	1
$A_8+A_6+A_4+A_3$	1260	1
$A_6+3A_4+A_3$	140	$1,2$
$5A_4+A_1$	10	$1,2,3$

$p=3$		
R	n	σ
$2E_8+A_5$	6	1
$2E_8+A_3+A_2$	12	1
$2E_8+2A_2+A_1$	2	1
$E_8+E_7+E_6$	6	1
$E_8+E_7+A_4+A_2$	30	1
$E_8+E_7+3A_2$	6	$1,2$
$E_8+2E_6+A_1$	2	1
$E_8+E_6+A_6+A_1$	42	1
$E_8+E_6+A_5+A_2$	6	$1,2$
$E_8+E_6+A_3+2A_2$	12	$1,2$
$E_8+E_6+3A_2+A_1$	2	2
$E_8+D_{11}+A_2$	12	1
$E_8+D_9+2A_2$	4	1
$E_8+D_5+A_6+A_2$	84	1
$E_8+D_5+A_4+2A_2$	20	1
$E_8+A_{11}+A_2$	4	1
$E_8+A_{11}+2A_1$	12	1
$E_8+A_{10}+A_2+A_1$	66	1
$E_8+A_9+2A_2$	10	1
$E_8+A_8+2A_2+A_1$	18	$1,2$

$p=3$		
R	n	σ
$E_8+A_7+A_5+A_1$	24	1
$E_8+A_7+A_4+A_2$	120	1
$E_8+A_6+3A_2+A_1$	42	$1,2$
$E_8+2A_5+A_3$	4	1
$E_8+A_5+A_4+2A_2$	30	$1,2$
$E_8+A_5+4A_2$	6	$1,2,3$
$E_8+A_3+5A_2$	12	$2,3$
$E_8+6A_2+A_1$	2	$2,3$
$2E_7+D_5+A_2$	12	1
$2E_7+A_3+2A_2$	4	1
$E_7+2E_6+A_2$	6	$1,2$
$E_7+E_6+A_7+A_1$	24	1
$E_7+E_6+A_5+A_3$	4	1
$E_7+E_6+A_4+2A_2$	30	$1,2$
$E_7+E_6+4A_2$	6	$1,2,3$
$E_7+D_{10}+2A_2$	2	1
$E_7+D_8+A_5+A_1$	6	1
$E_7+D_5+A_5+2A_2$	12	$1,2$
$E_7+D_4+2A_5$	2	1
$E_7+A_{10}+2A_2$	22	1

$p=3$			$p=3$		
R	n	σ	R	n	σ
$E_7+A_9+2A_2+A_1$	10	1	$D_{14}+3A_2+A_1$	6	1, 2
$E_7+A_7+3A_2+A_1$	24	1, 2	$D_{13}+A_6+A_2$	84	1
$E_7+A_6+A_4+2A_2$	70	1	$D_{13}+A_4+2A_2$	20	1
$E_7+A_5+A_3+3A_2$	4	2	$D_{12}+D_7+A_2$	12	1
$E_7+A_4+5A_2$	30	2, 3	$D_{12}+D_5+2A_2$	4	1
E_7+7A_2	6	2, 3, 4	$D_{11}+2A_5$	4	1
$3E_6+A_3$	12	1, 2	$D_{11}+5A_2$	12	2, 3
$3E_6+A_2+A_1$	2	1, 2	$D_{10}+D_6+A_5$	6	1
$2E_6+D_9$	4	1	$D_{10}+A_{11}$	12	1
$2E_6+D_5+A_4$	20	1	$D_{10}+A_6+A_5$	42	1
$2E_6+A_9$	10	1	$D_{10}+2A_5+A_1$	2	1
$2E_6+A_8+A_1$	18	1, 2	$D_{10}+A_5+3A_2$	2	2
$2E_6+A_6+A_2+A_1$	42	1, 2	D_9+6A_2	4	2, 3
$2E_6+A_5+A_4$	30	1, 2	$2D_8+A_3+A_2$	12	1
$2E_6+A_5+2A_2$	6	1, 2, 3	$D_8+A_{11}+A_2$	4	1
$2E_6+A_3+3A_2$	12	1, 2, 3	$D_8+A_7+A_5+A_1$	24	1
$2E_6+4A_2+A_1$	2	1, 2, 3	$D_8+A_7+A_4+A_2$	120	1
$E_6+D_{14}+A_1$	6	1	$D_8+2A_5+A_2+A_1$	6	1, 2
$E_6+D_{11}+2A_2$	12	1, 2	D_7+A_{14}	60	1
$E_6+D_{10}+A_5$	2	1	$D_7+A_{12}+A_2$	156	1
$E_6+D_9+3A_2$	4	2	$D_7+A_{11}+A_3$	12	1
$E_6+D_5+A_9+A_1$	60	1	$D_7+A_{11}+A_2+A_1$	2	1
$E_6+D_5+A_6+2A_2$	84	1, 2	$D_7+A_9+A_5$	60	1
$E_6+D_5+2A_5$	12	1, 2	$D_7+2A_5+A_4$	20	1
$E_6+D_5+A_4+3A_2$	20	2	$D_6+D_5+2A_5$	4	1
$E_6+A_{14}+A_1$	10	1	$2D_5+A_7+2A_2$	8	1
$E_6+A_{13}+2A_1$	42	1	$D_5+A_{13}+A_2+A_1$	84	1
$E_6+A_{11}+2A_2$	4	1, 2	$D_5+A_{12}+2A_2$	52	1
$E_6+A_{11}+A_2+2A_1$	12	1, 2	$D_5+A_{11}+A_4+A_1$	30	1
$E_6+A_{10}+A_5$	22	1	$D_5+A_{11}+A_3+A_2$	4	1
$E_6+A_{10}+A_4+A_1$	330	1	$D_5+A_{11}+2A_2+A_1$	6	1, 2
$E_6+A_{10}+2A_2+A_1$	66	1, 2	$D_5+A_9+3A_2+A_1$	60	1, 2
$E_6+A_9+A_5+A_1$	10	1	$D_5+A_8+A_4+2A_2$	180	1, 2
$E_6+A_9+3A_2$	10	2	$D_5+2A_7+A_2$	12	1
$E_6+A_8+3A_2+A_1$	18	1, 2, 3	$D_5+A_6+5A_2$	84	2, 3
$E_6+A_7+A_5+A_2+A_1$	24	1, 2	$D_5+2A_5+3A_2$	12	1, 2, 3
$E_6+A_7+A_4+2A_2$	120	1, 2	$D_5+A_4+6A_2$	20	2, 3
$E_6+A_6+A_5+A_4$	70	1	$D_4+A_{15}+A_2$	12	1
$E_6+A_6+4A_2+A_1$	42	1, 2, 3	$D_4+A_{11}+A_6$	84	1
$E_6+2A_5+A_3+A_2$	4	1, 2	$D_4+A_{11}+A_4+A_2$	20	1
$E_6+A_5+A_4+3A_2$	30	1, 2, 3	$D_4+3A_5+A_2$	2	1, 2
$E_6+A_5+5A_2$	6	1, 2, 3, 4	$A_{17}+2A_2$	2	1
$E_6+A_3+6A_2$	12	1, 2, 3, 4	$A_{16}+2A_2+A_1$	34	1
$E_6+7A_2+A_1$	2	2, 3, 4	$A_{15}+2A_2+2A_1$	4	1
$D_{19}+A_2$	12	1	$A_{14}+3A_2+A_1$	10	1, 2
$D_{17}+2A_2$	4	1	$A_{13}+A_4+2A_2$	70	1
$D_{16}+A_5$	6	1	$A_{13}+3A_2+2A_1$	42	1, 2
$D_{16}+A_3+A_2$	12	1	$A_{12}+A_4+2A_2+A_1$	130	1
$D_{16}+2A_2+A_1$	2	1	$A_{11}+5A_2$	4	2, 3
$D_{14}+A_4+A_2+A_1$	30	1	$A_{11}+4A_2+2A_1$	12	1, 2, 3

$p=3$		
R	n	σ
$A_{10}+A_5+3A_2$	22	2
$A_{10}+A_4+3A_2+A_1$	330	1, 2
$A_{10}+5A_2+A_1$	66	2, 3
$A_9+A_5+3A_2+A_1$	10	2
$A_9+2A_4+2A_2$	10	1
A_9+6A_2	10	2, 3
$A_8+6A_2+A_1$	18	1, 2, 3, 4
$A_7+A_5+4A_2+A_1$	24	1, 2, 3

$p=3$		
R	n	σ
$A_7+A_4+5A_2$	120	2, 3
$A_6+A_5+A_4+3A_2$	70	2
$A_6+7A_2+A_1$	42	2, 3, 4
$2A_5+A_3+4A_2$	4	1, 2, 3
$A_5+A_4+6A_2$	30	1, 2, 3, 4
A_5+8A_2	6	1, 2, 3, 4, 5
A_3+9A_2	12	1, 2, 3, 4, 5
$10A_2+A_1$	2	1, 2, 3, 4, 5

$p=2$		
R	n	σ
$2E_8+D_5$	4	1
$2E_8+D_4+A_1$	2	1
$2E_8+A_2+3A_1$	6	1
$2E_8+5A_1$	2	2
$E_8+E_7+D_6$	2	1
$E_8+E_7+D_4+A_2$	6	1
$E_8+E_7+D_4+2A_1$	2	2
$E_8+E_7+A_3+3A_1$	4	1, 2
$E_8+E_7+A_2+4A_1$	6	2
$E_8+E_7+6A_1$	2	2, 3
$E_8+E_6+D_7$	12	1
$E_8+E_6+D_4+A_3$	12	1, 2
$E_8+E_6+A_4+3A_1$	30	1
E_8+D_{13}	4	1
$E_8+D_{12}+A_1$	2	1
$E_8+D_{10}+A_2+A_1$	6	1
$E_8+D_{10}+3A_1$	2	1, 2
$E_8+D_9+D_4$	4	1, 2
$E_8+D_9+A_4$	20	1
$E_8+D_8+D_5$	4	1, 2
$E_8+D_8+D_4+A_1$	2	2
$E_8+D_8+A_2+3A_1$	6	2
$E_8+D_8+5A_1$	2	2, 3
$E_8+D_7+6A_1$	4	2, 3
$E_8+2D_6+A_1$	2	2
$E_8+D_6+D_4+A_2+A_1$	6	2
$E_8+D_6+D_4+3A_1$	2	2, 3
$E_8+D_6+A_3+4A_1$	4	2, 3
$E_8+D_6+A_2+5A_1$	6	2, 3
$E_8+D_6+7A_1$	2	3, 4
$E_8+D_5+2D_4$	4	2, 3
$E_8+D_5+D_4+A_4$	20	1, 2
$E_8+D_5+A_5+3A_1$	12	1, 2
$E_8+D_5+8A_1$	4	3, 4
$E_8+3D_4+A_1$	2	3
$E_8+2D_4+A_2+3A_1$	6	3
$E_8+2D_4+5A_1$	2	3, 4
$E_8+D_4+A_9$	10	1

$p=2$		
R	n	σ
$E_8+D_4+A_8+A_1$	18	1
$E_8+D_4+A_6+A_2+A_1$	42	1
$E_8+D_4+A_5+A_4$	30	1
$E_8+D_4+A_3+6A_1$	4	3, 4
$E_8+D_4+A_2+7A_1$	6	3, 4
$E_8+D_4+9A_1$	2	3, 4, 5
$E_8+A_{10}+3A_1$	22	1
$E_8+A_9+4A_1$	10	1, 2
$E_8+A_8+5A_1$	18	2
$E_8+A_7+A_2+4A_1$	24	1, 2
$E_8+A_6+A_4+3A_1$	70	1
$E_8+A_6+A_2+5A_1$	42	2
$E_8+A_5+A_4+4A_1$	30	2
$E_8+A_5+A_3+5A_1$	12	2, 3
$E_8+A_4+A_3+6A_1$	20	2, 3
$E_8+A_3+10A_1$	4	4, 5
$E_8+A_2+11A_1$	6	4, 5
E_8+13A_1	2	4, 5, 6
$3E_7$	2	1
$2E_7+D_7$	4	1
$2E_7+D_6+A_1$	2	1, 2
$2E_7+D_5+2A_1$	4	1, 2
$2E_7+D_4+A_3$	4	1, 2
$2E_7+D_4+A_2+A_1$	6	1, 2
$2E_7+D_4+3A_1$	2	1, 2, 3
$2E_7+A_4+A_3$	20	1
$2E_7+A_3+4A_1$	4	2, 3
$2E_7+A_2+5A_1$	6	2, 3
$2E_7+7A_1$	2	2, 3, 4
$E_7+E_6+D_5+3A_1$	12	1, 2
$E_7+E_6+D_4+A_4$	30	1
$E_7+E_6+A_4+4A_1$	30	2
$E_7+E_6+A_3+5A_1$	12	2, 3
E_7+D_{14}	2	1
$E_7+D_{12}+A_2$	6	1
$E_7+D_{12}+2A_1$	2	1, 2
$E_7+D_{11}+3A_1$	4	1, 2
$E_7+D_{10}+D_4$	2	1, 2

$p=2$			$p=2$		
R	n	σ	R	n	σ
$E_7+D_{10}+A_3+A_1$	4	$1,2$	$E_7+D_4+A_2+8A_1$	6	$3,4,5$
$E_7+D_{10}+A_2+2A_1$	6	$1,2$	$E_7+D_4+10A_1$	2	$3,4,5,6$
$E_7+D_{10}+4A_1$	2	$1,2,3$	$E_7+A_{11}+A_3$	6	1
$E_7+D_9+A_5$	12	1	$E_7+A_{10}+4A_1$	22	2
$E_7+D_9+5A_1$	4	$2,3$	$E_7+A_9+A_3+A_2$	60	1
$E_7+D_8+D_6$	2	$1,2$	$E_7+A_9+5A_1$	10	$2,3$
$E_7+D_8+D_4+A_2$	6	2	$E_7+A_8+6A_1$	18	$2,3$
$E_7+D_8+D_4+2A_1$	2	$1,2,3$	$E_7+A_7+2A_3+A_1$	8	$1,2$
$E_7+D_8+A_3+3A_1$	4	$1,2,3$	$E_7+A_7+A_2+5A_1$	24	$2,3$
$E_7+D_8+A_2+4A_1$	6	$1,2,3$	$E_7+A_6+A_5+A_3$	84	1
$E_7+D_8+6A_1$	2	$2,3,4$	$E_7+A_6+A_4+4A_1$	70	2
$E_7+D_7+D_6+A_1$	4	$1,2$	$E_7+A_6+A_2+6A_1$	42	$2,3$
$E_7+D_7+D_4+3A_1$	4	$2,3$	$E_7+A_5+A_4+5A_1$	30	$2,3$
$E_7+D_7+A_5+2A_1$	12	$1,2$	$E_7+A_5+A_3+6A_1$	12	$2,3,4$
$E_7+D_7+A_4+3A_1$	20	$1,2$	$E_7+A_4+A_3+7A_1$	20	$3,4$
$E_7+D_7+7A_1$	4	$3,4$	$E_7+A_3+11A_1$	4	$3,4,5,6$
$E_7+2D_6+A_2$	6	$1,2$	$E_7+A_2+12A_1$	6	$3,4,5,6$
$E_7+2D_6+2A_1$	2	$1,2,3$	E_7+14A_1	2	$3,4,5,6,7$
$E_7+D_6+D_5+3A_1$	4	$1,2,3$	$3E_6+3A_1$	6	1
$E_7+D_6+2D_4$	2	$2,3$	$2E_6+D_4+A_5$	6	1
$E_7+D_6+D_4+A_3+A_1$	4	$1,2,3$	$2E_6+A_5+4A_1$	6	2
$E_7+D_6+D_4+A_2+2A_1$	6	$2,3$	E_6+D_{15}	12	1
$E_7+D_6+D_4+4A_1$	2	$2,3,4$	$E_6+D_{12}+A_3$	12	$1,2$
$E_7+D_6+A_8$	18	1	$E_6+D_{11}+D_4$	12	$1,2$
$E_7+D_6+A_6+A_2$	42	1	$E_6+D_{10}+A_4+A_1$	30	1
$E_7+D_6+A_5+A_3$	12	$1,2$	$E_6+D_9+A_6$	84	1
$E_7+D_6+A_4+A_3+A_1$	20	$1,2$	$E_6+D_9+6A_1$	12	$2,3$
$E_7+D_6+A_3+5A_1$	4	$2,3,4$	$E_6+D_8+D_7$	12	$1,2$
$E_7+D_6+A_2+6A_1$	6	$2,3,4$	$E_6+D_8+D_4+A_3$	12	$1,2,3$
$E_7+D_6+8A_1$	2	$2,3,4,5$	$E_6+D_8+A_4+3A_1$	30	2
$E_7+D_5+D_4+A_5$	12	$1,2$	$E_6+D_7+2D_4$	12	$2,3$
$E_7+D_5+D_4+5A_1$	4	$2,3,4$	$E_6+D_7+8A_1$	12	$3,4$
$E_7+D_5+A_5+4A_1$	12	$2,3$	$E_6+D_6+D_5+4A_1$	12	$2,3$
$E_7+D_5+A_4+5A_1$	20	$2,3$	$E_6+D_6+D_4+A_4+A_1$	30	2
$E_7+D_5+9A_1$	4	$3,4,5$	$E_6+D_6+A_4+5A_1$	30	$2,3$
$E_7+3D_4+A_2$	6	3	$E_6+D_6+A_3+6A_1$	12	$2,3,4$
$E_7+3D_4+2A_1$	2	$2,3,4$	$E_6+D_5+D_4+A_6$	84	$1,2$
$E_7+2D_4+A_3+3A_1$	4	$2,3,4$	$E_6+D_5+D_4+6A_1$	12	$3,4$
$E_7+2D_4+A_2+4A_1$	6	$2,3,4$	$E_6+D_5+10A_1$	12	$4,5$
$E_7+2D_4+6A_1$	2	$2,3,4,5$	$E_6+3D_4+A_3$	12	$2,3,4$
$E_7+D_4+A_{10}$	22	1	$E_6+2D_4+A_4+3A_1$	30	3
$E_7+D_4+A_9+A_1$	10	$1,2$	$E_6+D_4+A_{11}$	4	$1,2$
$E_7+D_4+A_8+2A_1$	18	2	$E_6+D_4+A_{10}+A_1$	66	1
$E_7+D_4+A_7+A_2+A_1$	24	$1,2$	$E_6+D_4+A_8+A_2+A_1$	18	1
$E_7+D_4+A_6+A_4$	70	1	$E_6+D_4+A_7+A_4$	120	$1,2$
$E_7+D_4+A_6+A_2+2A_1$	42	2	$E_6+D_4+2A_5+A_1$	6	$1,2$
$E_7+D_4+A_5+A_4+A_1$	30	$1,2$	$E_6+D_4+A_4+7A_1$	30	$3,4$
$E_7+D_4+A_5+A_3+2A_1$	12	$1,2,3$	$E_6+D_4+A_3+8A_1$	12	$3,4,5$
$E_7+D_4+A_4+A_3+3A_1$	20	$2,3$	E_6+A_{15}	12	1
$E_7+D_4+A_3+7A_1$	4	$2,3,4,5$	$E_6+A_{12}+A_3$	156	1

$p=2$			$p=2$		
R	n	σ	R	n	σ
$E_6+A_{11}+A_4$	20	1	$D_{11}+A_4+6A_1$	20	2, 3
$E_6+A_{11}+A_3+A_1$	2	1	$D_{11}+10A_1$	4	4, 5
$E_6+A_{10}+5A_1$	66	2	$2D_{10}+A_1$	2	1, 2
$E_6+A_8+A_2+5A_1$	18	2	$D_{10}+D_8+A_2+A_1$	6	1, 2
$E_6+A_6+A_3+6A_1$	84	2, 3	$D_{10}+D_8+3A_1$	2	1, 2, 3
E_6+3A_5	2	1	$D_{10}+D_7+4A_1$	4	1, 2, 3
$E_6+2A_5+5A_1$	6	2, 3	$D_{10}+D_6+D_4+A_1$	2	1, 2, 3
$E_6+A_4+11A_1$	30	4, 5	$D_{10}+D_6+A_3+2A_1$	4	1, 2, 3
$E_6+A_3+12A_1$	12	4, 5, 6	$D_{10}+D_6+A_2+3A_1$	6	1, 2, 3
D_{21}	4	1	$D_{10}+D_6+5A_1$	2	2, 3, 4
$D_{20}+A_1$	2	1	$D_{10}+D_5+A_5+A_1$	12	1, 2
$D_{18}+A_2+A_1$	6	1	$D_{10}+D_5+6A_1$	4	2, 3, 4
$D_{18}+3A_1$	2	1, 2	$D_{10}+2D_4+A_2+A_1$	6	2, 3
$D_{17}+D_4$	4	1, 2	$D_{10}+2D_4+3A_1$	2	2, 3, 4
$D_{17}+A_4$	20	1	$D_{10}+D_4+A_3+4A_1$	4	2, 3, 4
$D_{16}+D_5$	4	1, 2	$D_{10}+D_4+A_2+5A_1$	6	2, 3, 4
$D_{16}+D_4+A_1$	2	1, 2	$D_{10}+D_4+7A_1$	2	2, 3, 4, 5
$D_{16}+A_2+3A_1$	6	1, 2	$D_{10}+A_{10}+A_1$	22	1
$D_{16}+5A_1$	2	2, 3	$D_{10}+A_9+2A_1$	10	1, 2
$D_{15}+6A_1$	4	2, 3	$D_{10}+A_8+3A_1$	18	1, 2
$D_{14}+D_6+A_1$	2	1, 2	$D_{10}+A_7+A_2+2A_1$	24	1, 2
$D_{14}+D_4+A_2+A_1$	6	1, 2	$D_{10}+A_6+A_4+A_1$	70	1
$D_{14}+D_4+3A_1$	2	2, 3	$D_{10}+A_6+A_2+3A_1$	42	1, 2
$D_{14}+A_3+4A_1$	4	1, 2, 3	$D_{10}+A_5+A_4+2A_1$	30	1, 2
$D_{14}+A_2+5A_1$	6	2, 3	$D_{10}+A_5+A_3+3A_1$	12	1, 2, 3
$D_{14}+7A_1$	2	2, 3, 4	$D_{10}+A_4+A_3+4A_1$	20	1, 2, 3
$D_{13}+D_8$	4	1, 2	$D_{10}+A_3+8A_1$	4	3, 4, 5
$D_{13}+2D_4$	4	2, 3	$D_{10}+A_2+9A_1$	6	3, 4, 5
$D_{13}+D_4+A_4$	20	1, 2	$D_{10}+11A_1$	2	3, 4, 5, 6
$D_{13}+A_5+3A_1$	12	1, 2	$D_9+D_8+D_4$	4	1, 2, 3
$D_{13}+8A_1$	4	3, 4	$D_9+D_8+A_4$	20	1, 2
$D_{12}+D_9$	4	1, 2	$D_9+D_6+A_5+A_1$	12	1, 2
$D_{12}+D_8+A_1$	2	1, 2	$D_9+D_6+6A_1$	4	2, 3, 4
$D_{12}+D_6+A_2+A_1$	6	1, 2	$D_9+D_5+A_7$	8	1, 2
$D_{12}+D_6+3A_1$	2	1, 2, 3	D_9+3D_4	4	2, 3, 4
$D_{12}+D_5+D_4$	4	1, 2, 3	$D_9+2D_4+A_4$	20	2, 3
$D_{12}+D_5+A_4$	20	1, 2	$D_9+D_4+A_5+3A_1$	12	2, 3
$D_{12}+2D_4+A_1$	2	2, 3	$D_9+D_4+8A_1$	4	3, 4, 5
$D_{12}+D_4+A_2+3A_1$	6	2, 3	D_9+A_{12}	52	1
$D_{12}+D_4+5A_1$	2	2, 3, 4	$D_9+A_{11}+A_1$	6	1
$D_{12}+A_9$	10	1	$D_9+A_9+A_2+A_1$	60	1
$D_{12}+A_8+A_1$	18	1	$D_9+A_8+A_4$	180	1
$D_{12}+A_6+A_2+A_1$	42	1	$D_9+A_5+7A_1$	12	3, 4
$D_{12}+A_5+A_4$	30	1	$D_9+A_4+8A_1$	20	3, 4
$D_{12}+A_3+6A_1$	4	2, 3, 4	D_9+12A_1	4	4, 5, 6
$D_{12}+A_2+7A_1$	6	2, 3, 4	$2D_8+D_5$	4	1, 2, 3
$D_{12}+9A_1$	2	3, 4, 5	$2D_8+D_4+A_1$	2	1, 2, 3
$D_{11}+D_6+4A_1$	4	2, 3	$2D_8+A_2+3A_1$	6	1, 2, 3
$D_{11}+D_4+6A_1$	4	3, 4	$2D_8+5A_1$	2	1, 2, 3, 4
$D_{11}+A_5+5A_1$	12	2, 3	$D_8+D_7+6A_1$	4	2, 3, 4

$p=2$		
R	n	σ
$D_8+2D_6+A_1$	2	$1,2,3$
$D_8+D_6+D_4+A_2+A_1$	6	$1,2,3$
$D_8+D_6+D_4+3A_1$	2	$1,2,3,4$
$D_8+D_6+A_3+4A_1$	4	$1,2,3,4$
$D_8+D_6+A_2+5A_1$	6	$2,3,4$
$D_8+D_6+7A_1$	2	$2,3,4,5$
$D_8+D_5+2D_4$	4	$1,2,3,4$
$D_8+D_5+D_4+A_4$	20	$1,2,3$
$D_8+D_5+A_5+3A_1$	12	$1,2,3$
$D_8+D_5+8A_1$	4	$2,3,4,5$
$D_8+3D_4+A_1$	2	$2,3,4$
$D_8+2D_4+A_2+3A_1$	6	$2,3,4$
$D_8+2D_4+5A_1$	2	$2,3,4,5$
$D_8+D_4+A_9$	10	2
$D_8+D_4+A_8+A_1$	18	2
$D_8+D_4+A_6+A_2+A_1$	42	2
$D_8+D_4+A_5+A_4$	30	2
$D_8+D_4+A_3+6A_1$	4	$2,3,4,5$
$D_8+D_4+A_2+7A_1$	6	$2,3,4,5$
$D_8+D_4+9A_1$	2	$2,3,4,5,6$
$D_8+A_{10}+3A_1$	22	2
$D_8+A_9+4A_1$	10	$1,2,3$
$D_8+A_8+5A_1$	18	$2,3$
$D_8+A_7+A_2+4A_1$	24	$1,2,3$
$D_8+A_6+A_4+3A_1$	70	2
$D_8+A_6+A_2+5A_1$	42	$2,3$
$D_8+A_5+A_4+4A_1$	30	$1,2,3$
$D_8+A_5+A_3+5A_1$	12	$1,2,3,4$
$D_8+A_4+A_3+6A_1$	20	$2,3,4$
$D_8+A_3+10A_1$	4	$3,4,5,6$
$D_8+A_2+11A_1$	6	$3,4,5,6$
D_8+13A_1	2	$3,4,5,6,7$
$D_7+2D_6+2A_1$	4	$1,2,3$
$D_7+D_6+D_4+4A_1$	4	$2,3,4$
$D_7+D_6+A_5+3A_1$	12	$1,2,3$
$D_7+D_6+A_4+4A_1$	20	$2,3$
$D_7+D_6+8A_1$	4	$3,4,5$
$D_7+2D_4+6A_1$	4	$2,3,4,5$
$D_7+D_4+A_5+5A_1$	12	$2,3,4$
$D_7+D_4+A_4+6A_1$	20	$3,4$
$D_7+D_4+10A_1$	4	$3,4,5,6$
$D_7+A_{11}+3A_1$	6	$1,2$
$D_7+A_9+A_2+3A_1$	60	$1,2$
$D_7+A_7+A_3+4A_1$	8	$1,2,3$
$D_7+A_6+A_5+3A_1$	84	$1,2$
$D_7+A_5+9A_1$	12	$3,4,5$
$D_7+A_4+10A_1$	20	$4,5$
D_7+14A_1	4	$3,4,5,6,7$
$3D_6+A_3$	4	$1,2,3$
$3D_6+A_2+A_1$	6	$1,2,3$

$p=2$		
R	n	σ
$3D_6+3A_1$	2	$1,2,3,4$
$2D_6+D_5+4A_1$	4	$1,2,3,4$
$2D_6+2D_4+A_1$	2	$1,2,3,4$
$2D_6+D_4+A_3+2A_1$	4	$1,2,3,4$
$2D_6+D_4+A_2+3A_1$	6	$1,2,3,4$
$2D_6+D_4+5A_1$	2	$1,2,3,4,5$
$2D_6+A_9$	10	$1,2$
$2D_6+A_8+A_1$	18	2
$2D_6+A_7+A_2$	24	$1,2$
$2D_6+A_6+A_2+A_1$	42	2
$2D_6+A_5+A_4$	30	$1,2$
$2D_6+A_5+A_3+A_1$	12	$1,2,3$
$2D_6+A_4+A_3+2A_1$	20	$1,2,3$
$2D_6+A_3+6A_1$	4	$2,3,4,5$
$2D_6+A_2+7A_1$	6	$2,3,4,5$
$2D_6+9A_1$	2	$2,3,4,5,6$
$D_6+D_5+D_4+A_5+A_1$	12	$1,2,3$
$D_6+D_5+D_4+6A_1$	4	$2,3,4,5$
$D_6+D_5+A_5+5A_1$	12	$2,3,4$
$D_6+D_5+A_4+6A_1$	20	$2,3,4$
$D_6+D_5+10A_1$	4	$3,4,5,6$
$D_6+3D_4+A_2+A_1$	6	$2,3,4$
$D_6+3D_4+3A_1$	2	$1,2,3,4,5$
$D_6+2D_4+A_3+4A_1$	4	$1,2,3,4,5$
$D_6+2D_4+A_2+5A_1$	6	$2,3,4,5$
$D_6+2D_4+7A_1$	2	$2,3,4,5,6$
$D_6+D_4+A_{10}+A_1$	22	2
$D_6+D_4+A_9+2A_1$	10	$2,3$
$D_6+D_4+A_8+3A_1$	18	$2,3$
$D_6+D_4+A_7+A_2+2A_1$	24	$2,3$
$D_6+D_4+A_6+A_4+A_1$	70	2
$D_6+D_4+A_6+A_2+3A_1$	42	$2,3$
$D_6+D_4+A_5+A_4+2A_1$	30	$2,3$
$D_6+D_4+A_5+A_3+3A_1$	12	$1,2,3,4$
$D_6+D_4+A_4+A_3+4A_1$	20	$2,3,4$
$D_6+D_4+A_3+8A_1$	4	$2,3,4,5,6$
$D_6+D_4+A_2+9A_1$	6	$2,3,4,5,6$
$D_6+D_4+11A_1$	2	$2,3,4,5,6,7$
D_6+A_{15}	4	1
$D_6+A_{13}+A_2$	42	1
$D_6+A_{11}+A_3+A_1$	6	$1,2$
$D_6+A_{11}+2A_2$	12	1
$D_6+A_{10}+A_5$	66	1
$D_6+A_{10}+5A_1$	22	$2,3$
$D_6+A_9+A_3+A_2+A_1$	60	$1,2$
$D_6+A_9+6A_1$	10	$2,3,4$
$D_6+A_8+A_5+A_2$	18	1
$D_6+A_8+7A_1$	18	$3,4$
$D_6+A_7+2A_3+2A_1$	8	$1,2,3$

$p=2$		
R	n	σ
$D_6+A_7+A_2+6A_1$	24	$2,3,4$
$D_6+A_6+A_5+A_3+A_1$	84	$1,2$
$D_6+A_6+A_4+5A_1$	70	$2,3$
$D_6+A_6+A_2+7A_1$	42	$3,4$
D_6+3A_5	6	$1,2$
$D_6+A_5+A_4+6A_1$	30	$2,3,4$
$D_6+A_5+A_3+7A_1$	12	$2,3,4,5$
$D_6+A_4+A_3+8A_1$	20	$3,4,5$
$D_6+A_3+12A_1$	4	$2,3,4,5,6,7$
$D_6+A_2+13A_1$	6	$3,4,5,6,7$
D_6+15A_1	2	$2,3,4,5,6,7,8$
$2D_5+D_4+A_7$	8	$1,2,3$
D_5+4D_4	4	$1,2,3,4,5$
$D_5+3D_4+A_4$	20	$2,3,4$
$D_5+2D_4+A_5+3A_1$	12	$2,3,4$
$D_5+2D_4+8A_1$	4	$2,3,4,5,6$
$D_5+D_4+A_{12}$	52	$1,2$
$D_5+D_4+A_{11}+A_1$	6	$1,2$
$D_5+D_4+A_9+A_2+A_1$	60	$1,2$
$D_5+D_4+A_8+A_4$	180	$1,2$
$D_5+D_4+A_5+7A_1$	12	$2,3,4,5$
$D_5+D_4+A_4+8A_1$	20	$3,4,5$
$D_5+D_4+12A_1$	4	$3,4,5,6,7$
D_5+A_{16}	68	1
$D_5+A_{15}+A_1$	2	1
$D_5+A_{11}+A_5$	2	1
$D_5+A_{11}+5A_1$	6	$2,3$
$D_5+A_9+A_6+A_1$	140	1
$D_5+A_9+A_2+5A_1$	60	$2,3$
D_5+2A_8	36	1
$D_5+2A_7+2A_1$	4	$1,2$
$D_5+A_7+A_3+6A_1$	8	$2,3,4$
$D_5+A_6+A_5+5A_1$	84	$2,3$
$D_5+A_5+11A_1$	12	$3,4,5,6$
$D_5+A_4+12A_1$	20	$4,5,6$
D_5+16A_1	4	$2,3,4,5,6,7,8$
$5D_4+A_1$	2	$1,2,3,4,5$
$4D_4+A_2+3A_1$	6	$1,2,3,4,5$
$4D_4+5A_1$	2	$1,2,3,4,5,6$
$3D_4+A_9$	10	3
$3D_4+A_8+A_1$	18	3
$3D_4+A_6+A_2+A_1$	42	3
$3D_4+A_5+A_4$	30	3
$3D_4+A_3+6A_1$	4	$1,2,3,4,5,6$
$3D_4+A_2+7A_1$	6	$2,3,4,5,6$

$p=2$		
R	n	σ
$3D_4+9A_1$	2	$1,2,3,4,5,6,7$
$2D_4+A_{10}+3A_1$	22	3
$2D_4+A_9+4A_1$	10	$2,3,4$
$2D_4+A_8+5A_1$	18	$3,4$
$2D_4+A_7+A_2+4A_1$	24	$2,3,4$
$2D_4+A_6+A_4+3A_1$	70	3
$2D_4+A_6+A_2+5A_1$	42	$3,4$
$2D_4+A_5+A_4+4A_1$	30	$2,3,4$
$2D_4+A_5+A_3+5A_1$	12	$2,3,4,5$
$2D_4+A_4+A_3+6A_1$	20	$2,3,4,5$
$2D_4+A_3+10A_1$	4	$2,3,4,5,6,7$
$2D_4+A_2+11A_1$	6	$2,3,4,5,6,7$
$2D_4+13A_1$	2	$2,3,4,5,6,7,8$
D_4+A_{17}	2	1
$D_4+A_{16}+A_1$	34	1
$D_4+A_{15}+2A_1$	4	$1,2$
$D_4+A_{14}+A_2+A_1$	10	1
$D_4+A_{13}+A_4$	70	1
$D_4+A_{13}+A_2+2A_1$	42	$1,2$
$D_4+A_{12}+A_4+A_1$	130	1
$D_4+A_{11}+A_3+3A_1$	6	$2,3$
$D_4+A_{11}+2A_2+2A_1$	12	$1,2$
$D_4+A_{10}+A_5+2A_1$	66	2
$D_4+A_{10}+A_4+A_2+A_1$	330	1
$D_4+A_{10}+7A_1$	22	$3,4$
$D_4+A_9+2A_4$	10	1
$D_4+A_9+A_3+A_2+3A_1$	60	$2,3$
$D_4+A_9+8A_1$	10	$3,4,5$
$D_4+A_8+A_5+A_2+2A_1$	18	2
$D_4+A_8+9A_1$	18	$3,4,5$
$D_4+A_7+2A_3+4A_1$	8	$2,3,4$
$D_4+A_7+A_2+8A_1$	24	$3,4,5$
$D_4+A_6+A_5+A_3+3A_1$	84	$2,3$
$D_4+A_6+A_4+7A_1$	70	$3,4$
$D_4+A_6+A_2+9A_1$	42	$3,4,5$
$D_4+3A_5+2A_1$	6	$1,2,3$
$D_4+A_5+A_4+8A_1$	30	$3,4,5$
$D_4+A_5+A_3+9A_1$	12	$2,3,4,5,6$
$D_4+A_4+A_3+10A_1$	20	$3,4,5,6$
$D_4+A_3+14A_1$	4	$2,3,4,5,6,7,8$
$D_4+A_2+15A_1$	6	$2,3,4,5,6,7,8$
D_4+17A_1	2	$2,3,4,5,6,7,8,9$
$A_{19}+2A_1$	20	1

$p=2$		
R	n	σ
$A_{18}+3A_1$	38	1
$A_{17}+A_3+A_1$	36	1
$A_{17}+A_3+A_1$	4	1
$A_{17}+A_2+2A_1$	6	1
$A_{17}+4A_1$	2	$1,2$
$A_{16}+5A_1$	34	2
$A_{15}+A_4+2A_1$	20	1
$A_{15}+A_3+A_2+A_1$	6	1
$A_{15}+A_3+3A_1$	2	$1,2$
$A_{15}+6A_1$	4	$2,3$
$A_{14}+A_3+2A_2$	60	1
$A_{14}+A_2+5A_1$	10	2
$A_{13}+A_5+A_3$	84	1
$A_{13}+A_4+4A_1$	70	$1,2$
$A_{13}+A_2+6A_1$	42	$2,3$
$A_{12}+A_6+3A_1$	182	1
$A_{12}+A_4+5A_1$	130	2
$A_{12}+A_3+6A_1$	52	$2,3$
$A_{11}+A_9+A_1$	60	1
$A_{11}+A_6+A_3+A_1$	42	1
$A_{11}+A_6+2A_2$	84	1
$A_{11}+2A_5$	12	1
$A_{11}+A_5+A_3+A_2$	6	1
$A_{11}+A_5+A_3+2A_1$	2	$1,2$
$A_{11}+A_5+5A_1$	4	$1,2,3$
$A_{11}+2A_3+2A_2$	12	$1,2$
$A_{11}+A_3+7A_1$	6	$2,3,4$
$A_{11}+2A_2+6A_1$	12	$2,3$
$A_{10}+A_9+2A_1$	110	1
$A_{10}+A_7+4A_1$	88	$1,2$
$A_{10}+A_6+A_3+A_2$	924	1
$A_{10}+A_5+6A_1$	66	$2,3$
$A_{10}+A_4+A_2+5A_1$	330	2
$A_{10}+11A_1$	22	$4,5$
$2A_9+A_3$	4	1

$p=2$		
R	n	σ
$2A_9+A_2+A_1$	6	1
$2A_9+3A_1$	2	$1,2$
$A_9+A_6+A_3+3A_1$	140	$1,2$
$A_9+2A_4+4A_1$	10	$1,2$
$A_9+A_3+A_2+7A_1$	60	$2,3,4$
A_9+12A_1	10	$3,4,5,6$
$A_8+A_5+A_2+6A_1$	18	$2,3$
$A_8+A_4+A_3+6A_1$	180	$2,3$
A_8+13A_1	18	$4,5,6$
$2A_7+2A_3+A_1$	2	$1,2$
$2A_7+A_3+4A_1$	4	$1,2,3$
$A_7+A_6+A_4+4A_1$	280	$1,2$
$A_7+A_6+2A_3+A_2$	168	$1,2$
$A_7+A_5+A_4+5A_1$	120	$1,2,3$
$A_7+4A_3+A_2$	24	$1,2,3$
$A_7+2A_3+8A_1$	8	$3,4,5$
$A_7+A_2+12A_1$	24	$3,4,5,6$
$3A_6+A_3$	28	1
$3A_6+3A_1$	14	1
A_6+3A_5	42	1
$A_6+A_5+A_3+7A_1$	84	$3,4$
$A_6+A_4+11A_1$	70	$4,5$
$A_6+A_2+13A_1$	42	$4,5,6$
$4A_5+A_1$	2	$1,2$
$3A_5+6A_1$	6	$1,2,3,4$
$A_5+A_4+12A_1$	30	$3,4,5,6$
$A_5+A_3+13A_1$	12	$3,4,5,6,7$
$A_4+A_3+14A_1$	20	$3,4,5,6,7$
$7A_3$	4	$1,2,3,4$
A_3+18A_1	4	$2,3,4,5,6,$ $7,8,9$
A_2+19A_1	6	$2,3,4,5,6,$ $7,8,9$
$21A_1$	2	$1,2,3,4,5,$ $6,7,8,9,10$

Table QE: The complete list of extremal quasi-elliptic $K3$ surfaces

$p = 2,\ MW = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus r}$.

R	σ	r	R	σ	r
$2E_8 + D_4$	1	0	$D_{12} + D_8$	$1, 2$	$2 - \sigma$
$E_8 + E_7 + 5A_1$	2	1	$D_{12} + 2D_4$	$2, 3$	$3 - \sigma$
$E_8 + D_{12}$	1	0	$D_{12} + 8A_1$	$3, 4$	$5 - \sigma$
$E_8 + D_8 + D_4$	2	0	$D_{10} + D_6 + 4A_1$	$2, 3$	$4 - \sigma$
$E_8 + D_6 + 6A_1$	3	1	$D_{10} + D_4 + 6A_1$	$3, 4$	$5 - \sigma$
$E_8 + 3D_4$	3	0	$D_{10} + 10A_1$	$4, 5$	$6 - \sigma$
$E_8 + D_4 + 8A_1$	4	1	$2D_8 + D_4$	$1, 2, 3$	$3 - \sigma$
$E_8 + 12A_1$	5	1	$D_8 + D_6 + 6A_1$	$2, 3, 4$	$5 - \sigma$
$2E_7 + D_6$	1	1	$D_8 + 3D_4$	$2, 3, 4$	$4 - \sigma$
$2E_7 + D_4 + 2A_1$	2	1	$D_8 + D_4 + 8A_1$	$3, 4, 5$	$6 - \sigma$
$2E_7 + 6A_1$	3	1	$D_8 + 12A_1$	$4, 5, 6$	$7 - \sigma$
$E_7 + D_{10} + 3A_1$	$1, 2$	$3 - \sigma$	$3D_6 + 2A_1$	$1, 2, 3$	$4 - \sigma$
$E_7 + D_8 + 5A_1$	$2, 3$	$4 - \sigma$	$2D_6 + D_4 + 4A_1$	$2, 3, 4$	$5 - \sigma$
$E_7 + 2D_6 + A_1$	2	1	$2D_6 + 8A_1$	$3, 4, 5$	$6 - \sigma$
$E_7 + D_6 + D_4 + 3A_1$	$2, 3$	$4 - \sigma$	$D_6 + 2D_4 + 6A_1$	$2, 3, 4, 5$	$6 - \sigma$
$E_7 + D_6 + 7A_1$	$3, 4$	$5 - \sigma$	$D_6 + D_4 + 10A_1$	$3, 4, 5, 6$	$7 - \sigma$
$E_7 + 2D_4 + 5A_1$	$3, 4$	$5 - \sigma$	$D_6 + 14A_1$	$3, 4, 5, 6, 7$	$8 - \sigma$
$E_7 + D_4 + 9A_1$	$3, 4, 5$	$6 - \sigma$	$5D_4$	$1, 2, 3, 4, 5$	$5 - \sigma$
$E_7 + 13A_1$	$4, 5, 6$	$7 - \sigma$	$3D_4 + 8A_1$	$2, 3, 4, 5, 6$	$7 - \sigma$
D_{20}	1	0	$2D_4 + 12A_1$	$3, 4, 5, 6, 7$	$8 - \sigma$
$D_{16} + D_4$	$1, 2$	$2 - \sigma$	$D_4 + 16A_1$	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	$9 - \sigma$
$D_{14} + 6A_1$	$2, 3$	$4 - \sigma$	$20A_1$	$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	$10 - \sigma$

$p = 3,\ MW = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus r}$.

R	σ	r	R	σ	r
$2E_8 + 2A_2$	1	0	$3E_6 + A_2$	$1, 2$	$2 - \sigma$
$E_8 + 2E_6$	1	0	$2E_6 + 4A_2$	$1, 2, 3$	$3 - \sigma$
$E_8 + E_6 + 3A_2$	2	0	$E_6 + 7A_2$	$2, 3, 4$	$4 - \sigma$
$E_8 + 6A_2$	$2, 3$	$3 - \sigma$	$10A_2$	$1, 2, 3, 4, 5$	$5 - \sigma$

Table E: The complete list of extremal elliptic $K3$ surfaces

$[a] = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \quad [a, b] = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.

p	R	σ	MW	p	R	σ	MW
11	$2A_{10}$	1	0	3	$D_7 + A_{11} + A_2$	1	[4]
7	$A_{13} + A_6 + A_1$	1	[2]	2	$A_{17} + 3A_1$	1	[6]
7	$E_8 + 2A_6$	1	0	2	$4A_5$	1	[3, 6]
5	$E_7 + A_9 + A_4$	1	[2]	2	$2A_9 + 2A_1$	1	[10]
5	$A_{14} + A_4 + A_2$	1	[3]	2	$E_6 + A_{11} + A_3$	1	[6]
3	$D_{16} + 2A_2$	1	[2]	2	$D_5 + A_{15}$	1	[4]
3	$D_{10} + 2A_5$	1	[2, 2]				

参考文献

[1] M. Artin, *Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces*, Amer. J. Math. **84** (1962), 485–496.

[2] ———, *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. **88** (1966), 129–136.

[3] ———, *Supersingular $K3$ surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 543–567 (1975).

[4] ———, *Coverings of the rational double points in characteristic p*, Complex analysis and algebraic geometry. Edited by W. L. Baily, Jr. and T. Shioda. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 11–22.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: Systèmes de racines*, Hermann, Paris, 1968.

[6] I. R. Dolgachev and S. Kondo, *A supersingular $K3$ surface in characteristic 2 and the Leech lattice*, preprint, **math.AG/0112283** (2001).

[7] W. Ebeling, *Lattices and codes*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994.

[8] Y. Goto, *On the Néron-Severi groups of some $K3$ surfaces*, The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 305–328.

[9] H. Ito, *The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic* 3, Math. Z. **211** (1992), no. 1, 1–39.

[10] ———, *The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic* 2, Tohoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 2, 221–251.

[11] ———, *On automorphisms of supersingular $K3$ surfaces*, Osaka J. Math. **34** (1997), no. 3, 713–724.

[12] ———, *On extremal elliptic surfaces in characteristic* 2 *and* 3, Hiroshima Math. J. **32** (2002), 179–188.

[13] S. Kondō, *Algebraic $K3$ surfaces with finite automorphism groups*, Nagoya Math. J., **116** (1989), 1–15.

[14] V. V. Nikulin, *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Math USSR-Izv. **14** (1979), no. 1, 103–167.

[15] ______, *Weil linear systems on singular $K3$ surfaces*, Algebraic geometry and analytic geometry (Tokyo, 1990), Springer, Tokyo, 1991, pp. 138–164.

[16] K. Nishiyama, *The Jacobian fibrations on some $K3$ surfaces and their Mordell-Weil groups*, Japan. J. Math. (N.S.), **22** (1996), no. 2, 293–347.

[17] A. N. Rudakov and I. R. Šafarevič, *Supersingular $K3$ surfaces over fields of characteristic* 2, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 4, 848–869: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 614–632.

[18] ______, *Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic*, Current problems in mathematics, Vol. 18, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981, pp. 115–207: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.

[19] B. Saint-Donat, *Projective models of $K-3$ surfaces*, Amer. J. Math. **96** (1974), 602–639.

[20] I. Shimada, *Rational double points on supersingular $K3$ surfaces*, preprint, `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[21] T. Shioda, *Supersingular $K3$ surfaces*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., Vol. 732, Springer, Berlin, 1979, pp. 564–591.

[22] ______, *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **39** (1990), no. 2, 211–240.

060-0810
札幌市北区北１０条西８丁目
北海道大学理学部数学教室
shimada@math.sci.hokudai.ac.jp