符号と超特異 $K3$ 曲面のモジュライ

北大・理　島田　伊知朗　(Ichiro SHIMADA)

標数 2 の射影平面の純非分離な 2 重被覆として得られる超特異 $K3$ 曲面の幾何学的構造が，ある性質をもつ長さ 21 の線形符号によって記述されるということを解説する．標数 2 の超特異 $K3$ 曲面のモジュライは，これらの線形符号の同型類に対応した strata に分割される．次元の低い strata について詳しく調べる．

証明の細部については [8], [9] および [11] を参照されたい．論説 [10] と重なる部分が多くあることをお断りしておく．

1　超特異 $K3$ 符号と超特異 $K3$ 格子

超特異 $K3$ 符号も超特異 $K3$ 格子も，どちらもこの論説のなかでのみ使われる用語である．

定義 1.1 次を満たす長さ 21 の線形符号 $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^{21}$ を超特異 $K3$ 符号という．

(i) $[1, 1, \dots, 1] \in \mathcal{C}$,

(ii) 任意の語 $A \in \mathcal{C}$ の Hamming 重み $|A|$ は $|A| \in \{0, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 21\}$ をみたす．

計算機を使って超特異 $K3$ 符号の同型類を完全に決定した．超特異 $K3$ 符号の次元は高々10 であり，d 次元の超特異 $K3$ 符号の同型類の個数 $s(d)$ は下の表で与えられる：

d	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$s(d)$	1	3	13	41	58	43	21	8	3	1

21 個の元からなる集合

$$\mathcal{P} := \{1, 2, \dots, 21\}$$

を固定し，$\mathbb{F}_2^{21}$ を $\mathcal{P}$ のベキ集合 $\mathrm{Pow}(\mathcal{P})$ と自然に同一視する．超特異 $K3$ 符号の各語は，長さ 21 の $\mathbb{F}_2$-係数のベクトルとして表され，また $\mathcal{P}$ の部分集合としても表される．

定義 1.2 重みが 5, 8 または 9 の語 $A \in \mathbb{F}_2^{21}$ の次数 $\deg A$ を

$$\deg A := \begin{cases} 1 & \text{if } |A| = 5, \\ 2 & \text{if } |A| = 8, \\ 3 & \text{if } |A| = 9 \end{cases}$$

により定める．$\mathcal{C}$ を超特異 $K3$ 符号とし，$A \in \mathcal{C}$ かつ $|A| \in \{5, 8, 9\}$ とする．分解

$$A = A_1 + A_2 \qquad (A_1, A_2 \in \mathcal{C}_G)$$

で，$|A_1|, |A_2| \in \{5, 8, 9\}$ かつ $\deg A = \deg A_1 + \deg A_2$ なるものが存在するとき，A は $\mathcal{C}$ において可約であるという．A が $\mathcal{C}$ のなかで可約でないとき，A は $\mathcal{C}$ のなかで既約であるという．

定義により，超特異 $K3$ 符号は $\mathcal{P} = [1, 1, \dots, 1]$ と既約な語により生成される．次数 $\deg A$ の幾何学的な意味については §4 を参照されたい．

この論説の最後に，各同型類を代表する超特異 $K3$ 符号の一覧表を載せる．この表には次のデータが記載されている．

- $\sigma = 11 - \dim \mathcal{C}$.
- `basis`: $\mathbb{F}_2$ 上の基底.
- `l`: 重さ 5 の語の個数.（重さ 5 の語はすべて既約である．）
- `q`: 重さ 8 の既約な語の個数.
- `e`: 重さ 9 の既約な語の個数.
- `tl`: 相異なる重さ 5 の語の 3 つ組 L_1, L_2, L_3 で，各語を $\mathcal{P}$ の部分集合とみたときの共通部分 $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ が 1 点からなるものの個数.
- `lq`: 重さ 5 の語 L と既約な重さ 8 の語 Q のペア (L, Q) で，$L \cap Q$ が空集合となるものの個数.
- `qq`: 既約な重さ 8 の語のペア (Q_1, Q_2) で，$|Q_1 \cap Q_2| = 2$ となるものの個数.

`basis` においては，$\mathcal{C}$ の各元は長さ 21 の bit ベクトル $[\alpha_0, \dots, \alpha_{20}]$ によりあらわされ，bit ベクトルは，整数 $2^{20}\alpha_0 + \cdots + 2\alpha_{19} + \alpha_{20}$ によりあらわされている．ただし，$[1, 1, \dots, 1] = 2^{21} - 1$ はすべての基底にあらわれるので省略されている．

例 1.3 No. 191 の 10 次元超特異 $K3$ 符号 $\mathcal{C}_{191}$ は Dolgachev-Kondo 符号 $\mathcal{C}_{\mathrm{DK}}$ とよばれ ([3])，次のように構成される．射影平面の $\mathbb{F}_4$-有理点の集合 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)$ は 21 個の元か

らなる．$\mathcal{C}_{\mathrm{DK}}$ は，1 直線上にある 5 個の $\mathbb{F}_4$-有理点のなす 21 個の語で生成される符号である．その weight-enumerator は

$$1 + 21z^5 + 210z^8 + 280z^9 + 280z^{12} + 210z^{13} + 21z^{16} + z^{21}$$

であたえられる．

注意 1.4 定義より直ちにわかるように，$\mathcal{C}_{\mathrm{DK}}$ の部分符号で $\mathcal{P} = [1, 1, \dots, 1]$ を含むものは超特異 $K3$ 符号である．Nos. 139, 150, 179, 185 以外の同型類はこの方法で作られる．同型類 Nos. 139, 150, 179, 185 はこの方法では作れない．

定義 1.5 超特異 $K3$ 符号 $\mathcal{C}$ が与えられたとする．語 $A \in \mathcal{C}$ に対し，長さ 22 の語 $\widetilde{A}$ を

$$\widetilde{A} := \begin{cases} (A, 0) & \text{if } |A| \equiv 0 \mod 4, \\ (A, 1) & \text{if } |A| \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

により定義し，

$$\widetilde{\mathcal{C}} := \{ \ \widetilde{A} \ \mid \ A \in \mathcal{C} \ \} \quad \subset \quad \mathbb{F}_2^{21} \oplus \mathbb{F}_2$$

とおく．$\widetilde{\mathcal{C}}$ は線形符号になり，$\dim \widetilde{\mathcal{C}}$ は $\dim \mathcal{C}$ と等しい．このようにして得られる線形符号 $\widetilde{\mathcal{C}}$ を拡大超特異 $K3$ 符号とよぶ．

注意 1.6 講演中に指摘されたことであるが，$\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{DK}}$ は 24 次元の binary Golay code の引き戻しとして得られる．φ を拡大に対応する新しい座標とし，$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4) \sqcup \{\varphi\}$ から MOG の positions への写像 γ を表 1.1 により定義すると，γ による Golay code の引き戻しが $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{DK}}$ になる．この写像 γ は，論文 [7] において標数 2 における Fermat cubic 4-fold の中間次元のある代数的サイクルのなす格子が laminated lattice Λ_{22} ([2, Chapter 6]) と同型であることを示すときにもあらわれた．

定義 1.7 σ を 10 以下の正整数とする．ランク 22 の格子 L が次をみたすとき，L を超特異 $K3$ 格子という．

(i) even (すなわち $v^2 \in 2\mathbb{Z}$ がすべての $v \in L$ に対して成立),

(ii) hyperbolic (すなわち L の signature は $(1, 21)$),

(iii) $\operatorname{disc} L = -2^{2\sigma}$,

(iv) 2-elementary (すなわち $L^{\vee}/L \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2\sigma}$, ここで $L^{\vee}$ は L の双対格子 $\operatorname{Hom}(L, \mathbb{Z})$),

(v) type I (すなわち $v^2 \in \mathbb{Z}$ がすべての $v \in L^{\vee}$ に対して成立).

$(1:\omega:0)$	$(1:\bar\omega:0)$	$(1:1:0)$	$(1:0:0)$	$(0:1:0)$	$(0:0:1)$
$(1:\omega:1)$	$(1:\bar\omega:1)$	$(1:1:1)$	$(1:0:1)$	$(0:1:1)$	φ
$(1:\omega:\omega)$	$(1:\bar\omega:\omega)$	$(1:1:\omega)$	$(1:0:\omega)$	$(0:1:\omega)$	φ
$(1:\omega:\bar\omega)$	$(1:\bar\omega:\bar\omega)$	$(1:1:\bar\omega)$	$(1:0:\bar\omega)$	$(0:1:\bar\omega)$	φ

$\omega \in \mathbb{F}_4$ は 1 の原始 3 乗根，$\bar\omega = \omega + 1$.

表 1.1: γ の定義

次の定理が Rudakov-Shafarevich [6] によって示された．

定理 1.8 各 $\sigma = 1, \dots, 10$ に対し，$\operatorname{disc} L = -2^{2\sigma}$ なる超特異 $K3$ 格子は同型を除いて unique に存在する．

超特異 $K3$ 符号と超特異 $K3$ 格子は次のような関係にある．

A_1 をランク 1 の負定符号の root 格子 $[-2]$ とし，2-elementary かつ hyperbolic なランク 22 の格子

$$S_0 := \mathbb{Z}[21A_1] \oplus [2] = \begin{bmatrix} -2 & & & & \\ & \ddots & & \mbox{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mbox{\Large 0} & & -2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

を考える．S_0 の標準直交基底を r_i $(i = 1, \dots, 21)$, h とする：

$$r_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), \qquad h = (0, \dots, 0, 1).$$

S_0 の discriminant group $S_0^\vee/S_0$ は自然に $\mathbb{F}_2^{21} \oplus \mathbb{F}_2$ と同型である．したがって S_0 の overlattice S (すなわち，$S_0^\vee$ の部分加群で S_0 を含みかつ $S_0^\vee$ 上の $\mathbb{Q}$-値双線形形式が S 上で $\mathbb{Z}$ に値をとるもの) に対し，S/S_0 は長さ 22 の線形符号になる．$\widetilde{\mathcal{C}} := S/S_0$ とおくと，$\operatorname{disc} S$ は $-2^{2\sigma}(\sigma = 11 - \dim \widetilde{\mathcal{C}})$ に等しい．

命題 1.9 S を $S_0^\vee$ の部分加群で S_0 を含むものとする．S が下の条件 (i)-(iii) を満たすための必要十分条件は，$S/S_0 \subset \mathbb{F}_2^{21} \oplus \mathbb{F}_2$ が拡大超特異 $K3$ 符号となることである．

(i) S は超特異 $K3$ 格子であり，

(ii) $\{\, v \in S \mid vh = 1, v^2 = 0 \,\}$ は空集合であり，

(iii) $\{\, v \in S \mid vh = 0, v^2 = -2 \,\}$ は $\{\pm r_1, \ldots, \pm r_{21}\}$ と一致する．

2　$K3$ 曲面とその Néron-Severi 格子

k を代数閉体とし，代数多様体はすべてこの上で定義されているとする．

定義 2.1 非特異射影代数曲面 X は，どの点でも 0 とならない正則 2-形式をもち，かつ $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ となるとき，$K3$ 曲面と呼ばれる．

定義 2.2 X を非特異射影代数曲面とする．X 上の因子 $D = \sum m_i C_i$ (m_i は整数, C_i は X 上の既約な曲線) を考える．X 上の任意の曲線 C' に対して D と C' の交点数 DC' が 0 となるとき，D は数値的に 0 と同値であるという．D を含む数値的同値類を $[D]$ と書く．

定義 2.3 X を非特異射影代数曲面とする．X 上の因子の数値的同値類のなすアーベル群を $NS(X)$ と書く．$[D][D'] := DD'$ により $NS(X)$ は格子になる．この格子を X の Néron-Severi 格子という．またそのランクを X の Picard 数という．

標数 0 の体上定義された $K3$ 曲面の Picard 数は高々20 である．一方，正標数の体上定義された $K3$ 曲面の Picard 数は，20 以下であるかあるいは 22 である．

定義 2.4 $K3$ 曲面は，その Picard 数が 22 となるとき,（Shioda の意味で）超特異であるといわれる．

例 2.5 4 次曲面

$$X = \{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0\} \quad \subset \quad \mathbb{P}^3$$

を考える．基礎体 k の標数が 2 でなければ，この 4 次曲面は非特異でしたがって $K3$ 曲面になる．Picard 数は

$$\operatorname{rank} NS(X) = \begin{cases} 20 & \text{if } \operatorname{char} k = 0 \text{ or } \operatorname{char} k \equiv 1 \bmod 4, \\ 22 & \text{if } \operatorname{char} k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

となる．

つぎの定理は，Artin [1] および Rudakov-Shafarevich [6] によって示された．

定理 2.6 標数 $p > 0$ の基礎体の上で考える．超特異 $K3$ 曲面 X の Néron-Severi 格子 $NS(X)$ は，even かつ hyperbolic であり，$NS(X)^\vee/NS(X)$ は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2\sigma(X)}$ と同型になる．ここで，$\sigma(X)$ は 10 以下の正整数であり，X の Artin 不変量とよばれる．

さらに，$p = 2$ なら $NS(X)$ は type I である．

定理 1.8 と定理 2.6 より次を得る．

系 2.7 標数 2 の体上定義された超特異 $K3$ 曲面の Néron-Severi 格子は，超特異 $K3$ 格子である．

つぎの存在定理は，Artin [1], Shioda [12] および Rudakov-Shafarevich [5] によって示された．

定理 2.8 素数 p と 10 以下の正整数 σ の任意のペア (p, σ) に対し，標数 p の体上定義された超特異 $K3$ 曲面で，Artin 不変量が σ となるものが存在する．

3 標数 2 における超特異 $K3$ 曲面のモジュライ

以下，基礎体 k の標数は 2 であるとする．

$G = G(X, Y, Z)$ を 3 変数 6 次同次多項式，すなわち射影平面 $\mathbb{P}^2$ の可逆層 $\mathcal{O}(6)$ の大域切断とする．標数 2 においては，G の微分 dG をベクトル束 $\Omega^1(6)$ の大域切断として定義できる．実際，同型 $\mathcal{O}(6) \cong \mathcal{O}(3)^{\otimes 2}$ を用いることにより，直線束 $\mathcal{O}(6)$ の局所自明化でその変換関数がすべて t^2 のかたちをしているものをとることができる．$g = t^2 g'$ なら $dg = t^2 dg'$ が成立するので，G の局所データ g の微分 dg ははり合わさってベクトル束 $\Omega^1(6)$ の大域切断 dG を定める．$Z(dG)$ により，$dG = 0$ で定義された $\mathbb{P}^2$ の部分スキームをあらわす．$P \in Z(dG)$ とする．ベクトル束 $\Omega^1(6)$ の全空間のなかで，切断 dG とゼロ切断が P において横断的に交わっているとき，$Z(dG)$ は P において 0 次元かつ被約であるという．すべての $P \in Z(dG)$ において $Z(dG)$ が 0 次元かつ被約であるとき，$Z(dG)$ は 0 次元かつ被約であるという．

定義 3.1 $Z(dG)$ が 0 次元かつ被約となる次数 6 の同次多項式 G のなす集合を $\mathcal{U}$ と書く．$\mathcal{U}$ は次数 6 の同次多項式全体のなす 28 次元のベクトル空間 $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(6))$ の Zariski 開集合である．

G が $\mathcal{U}$ に属する同次多項式なら，$Z(dG)$ は

$$c_2(\Omega^1(6)) = 21$$

個の被約な点からなる．ここで c_2 は第 2 Chern 類である．逆に，$Z(dG)$ が 21 個の点からなれば，それらの点はすべて被約であり，$G \in \mathcal{U}$ が成立する．

例 3.2 Dolgachev-Kondo [3] によって発見された次の同次 6 次多項式を考えよう．

$$G_{\mathrm{DK}} := XYZ(X^3 + Y^3 + Z^3).$$

$Z(dG_{\mathrm{DK}})$ は $\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{F}_4$-有理点の集合 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)$ と一致する．$|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)| = 21$ より $G_{\mathrm{DK}} \in \mathcal{U}$ である．したがって $\mathcal{U}$ は空でない．

直線束 $\mathcal{O}(3)$ の全空間のなかで，方程式

$$w^2 = G$$

により定義される曲面 Y_G を考える．ここで，w は直線束 $\mathcal{O}(3)$ のファイバー座標である．被覆射 $\pi_G : Y_G \to \mathbb{P}^2$ は純非分離射となる．Y_G の特異点集合 $\operatorname{Sing} Y_G$ は $\pi_G^{-1}(Z(dG))$ と一致し，さらに $P \in Z(dG)$ が被約な点であるという条件と P 上の Y_G の特異点が通常 2 重点であるという条件は同値である．したがって，G が $\mathcal{U}$ に属する同次多項式であるための必要十分条件は，$\operatorname{Sing}(Y_G)$ が 21 個の通常 2 重点からなることである．

非特異曲面上の自己交点数が -2 の非特異有理曲線を (-2)-曲線という．通常 2 重点の最小特異点解消には例外曲線として (-2)-曲線が 1 本あらわれる．$G \in \mathcal{U}$ のとき，Y_G の最小特異点解消として得られる曲面 X_G は超特異 $K3$ 曲面となる．実際，$K3$ 曲面 X_G の上には，$\mathbb{P}^2$ の直線の引き戻しとして得られる曲線と，最小特異点解消 $X_G \to Y_G$ により Y_G の特異点につぶされる 21 本の (-2)-曲線が存在し，これらの数値的同値類は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であるから，X_G の Néron-Severi 格子 $NS(X_G)$ のランクは 22 となる．

逆に次が成立する：

定理 3.3 ([8]) X を標数 2 における超特異 $K3$ 曲面とすると，ある $G \in \mathcal{U}$ が存在して，X は X_G と同型になる．

線型写像 $G \mapsto dG$ の核を $\mathcal{V}$ とする．

$$\mathcal{V} = \{\ H^2 \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(6))\ \mid\ H \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(3))\ \}$$

である．$G \in \mathcal{U}$ ならば，任意の $H^2 \in \mathcal{V}$ に対して $G + H^2 \in \mathcal{U}$ である．すなわち，$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ に平行移動により作用する．G と G' を $\mathcal{U}$ に属する同次多項式とする．X_G と $X_{G'}$ が $\mathbb{P}^2$ 上同型であるための必要十分条件は，ある $c \in k^\times$ と $H^2 \in \mathcal{V}$ が存在して，

$$G' = cG + H^2$$

が成立することである．したがって，標数 2 における次数 2 の超特異 $K3$ 曲面のモジュライ空間を

$$\mathfrak{M} := PGL(3,k) \setminus \mathbb{P}_*(\mathcal{U}/\mathcal{V})$$

により構成することができる．$\mathfrak{M}$ の次元は

$$\dim \mathfrak{M} = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(6)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(3)) - 1 - \dim PGL(3,k) = 9$$

であるから，たしかに Artin [1] の結果と一致する．

注意 3.4 一般に，$\mathbb{P}^2$ の純非分離被覆として得られる曲面は Zariski 曲面とよばれ，その一般的な性質が [4] において詳しく調べられている．

G を $\mathcal{U}$ に属する次数 6 の同次多項式とする．$[G] \in \mathfrak{M}$ により，対応するモジュライ空間上の点をあらわす．また，

$$\phi_G : X_G \to \mathbb{P}^2$$

により，Y_G の最小特異点解消 $X_G \to Y_G$ と純非分離な被覆射 $\pi_G : Y_G \to \mathbb{P}^2$ の合成をあらわす．$\mathbb{P}^2$ の general な直線の引き戻しとして得られる既約曲線を $H_G \subset X_G$ とする．また，

$$Z(dG) = \{P_1, \ldots, P_{21}\}$$

とし，$\Gamma_i \subset X_G$ で P_i につぶされる (-2)-曲線をあらわす．X_G の Néron-Severi 格子 $NS(X_G)$ のなかで，数値的同値類 $[\Gamma_1], \ldots, [\Gamma_{21}]$ および $[H_G]$ により生成される部分格子を $NS(X_G)_0$ と書く．対応 $r_i \mapsto [\Gamma_i]$, $h \mapsto [H_G]$ により，格子 $NS(X_G)_0$ は (1.1) で定義された格子 S_0 と同型になる．したがって，$NS(X_G)_0$ の discriminant group $(NS(X_G)_0)^\vee / NS(X_G)_0$ は $\mathbb{F}_2^{21} \oplus \mathbb{F}_2$ と同型であり，第 1 ファクター $\mathbb{F}_2^{21}$ は $Z(dG)$ のベキ集合 $\mathrm{Pow}(Z(dG))$ と自然に同一視できる．$NS(X_G)$ と $NS(X_G)_0$ はともにランクが 22 であるから，$NS(X_G)$ は $NS(X_G)_0$ の overlattice である．長さ 22 の線形符号 $\mathcal{C}_G^{\sim}$ を，

$$\mathcal{C}_G^{\sim} := NS(X_G)/NS(X_G)_0 \subset (NS(X_G)_0)^\vee / NS(X_G)_0 = \mathbb{F}_2^{21} \oplus \mathbb{F}_2 = \mathrm{Pow}(Z(dG)) \oplus \mathbb{F}_2$$

により定義し，長さ 21 の線形符号

$$\mathcal{C}_G \subset \mathbb{F}_2^{21} = \mathrm{Pow}(Z(dG))$$

を $\mathcal{C}_G^{\sim}$ の第 1 ファクターへの射影とする．X_G の Artin 不変量 $\sigma(X_G)$ は

$$\sigma(X_G) = 11 - \dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}_G^{\sim} = 11 - \dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}_G$$

により求められる．次の定理が基本的である．この定理は，命題 1.9 と系 2.7 を用いて証明される．

定理 3.5 長さ 21 の線形符号 $\mathcal{C}$ に対し，ある $G \in \mathcal{U}$ が存在して $\mathcal{C}$ が $\mathcal{C}_G$ と同型になるための必要十分条件は，$\mathcal{C}$ が超特異 $K3$ 符号であることである．

この定理により，モジュライ空間 $\mathfrak{M}$ を超特異 $K3$ 符号の同型類に対応した 192 個の部分集合に分割することができる．すなわち，$[\mathcal{C}_0], \ldots, [\mathcal{C}_{191}]$ を §5 の一覧表により番号付けされた超特異 $K3$ 符号の同型類とし，

$$\mathfrak{M}_i := \{ \ [G] \in \mathfrak{M} \ \mid \ \mathcal{C}_G \text{ は } \mathcal{C}_i \text{ と同型} \ \}$$

とおくと，分割

$$\mathfrak{M} = \bigsqcup_{i=0}^{191} \mathfrak{M}_i$$

を得る．$\mathfrak{M}_0$ は $\mathfrak{M}$ の Zariski 開集合になる．$\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ は $\mathfrak{M}$ において余次元 1 であり，かつ既約であることが証明される．

4　符号から超特異 $K3$ 曲面の幾何学へ

符号 $\mathcal{C}_G$ から超特異 $K3$ 曲面 X_G，あるいは純非分離被覆 $Y_G \to \mathbb{P}^2$ の幾何学的性質についての情報を得ることができる．以下にいくつかの例をあげる．$\mathcal{C}_G$ の各語は，$Z(dG)$ の部分集合と自然にみなされることに注意する．

命題 4.1 3 点 $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3} \in Z(dG)$ が直線上にあるための必要十分条件は，$\mathcal{C}_G$ の重さ 5 の語で $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}$ を含むものが存在することである．

系 4.2 $Z(dG)$ のある 3 点が直線 $L \subset \mathbb{P}^2$ 上にあれば，$L \cap Z(dG)$ は 5 点からなる．

命題 4.3 6 点 $P_{i_1}, \ldots, P_{i_6} \in Z(dG)$ が非特異 2 次曲線上にあるための必要十分条件は，$\mathcal{C}_G$ の重さ 8 の既約な語で $P_{i_1}, \ldots, P_{i_6}$ を含むものが存在することである．

系 4.4 $Z(dG)$ のある 6 点が非特異 2 次曲線 $Q \subset \mathbb{P}^2$ 上にあれば，$Q \cap Z(dG)$ は 8 点からなる．

定義 4.5 平面 3 次曲線の pencil $\mathcal{E} = \{E_t\}$ が regular であるとは次の条件を満たすことである．

(i) $\mathcal{E}$ の base locus は 9 点からなる．

(ii) $\mathcal{E}$ の特異メンバーはすべて I_0 型である．

命題 4.6 $\mathcal{C}_G$ の重さ 9 の既約な語 A に対し，A を base locus とする 3 次曲線の regular pencil が存在する．

X_G の射影的自己同型群

$$\mathrm{ProjAut}(X_G) := \{\ g \in PGL(3,k)\ \mid\ g(Z(dG)) = Z(dG)\ \}$$

を考える．$\mathrm{ProjAut}(X_G)$ の各元は $Z(dG)$ の置換を引き起こす．定義により，各 $g \in \mathrm{ProjAut}(X_G)$ は部分空間 $\mathcal{C}_G \subset \mathrm{Pow}(Z(dG))$ を保つ．したがって，$K3$ 曲面の射影的自己同型群 $\mathrm{ProjAut}(X_G)$ を符号の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_G)$ のなかに埋め込むことができる．

Artin 不変量の小さな超特異 $K3$ 曲面の同型類のなす strata，すなわち次元の大きな超特異 $K3$ 符号に対応する strata の構造を詳しく見てみよう．

Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面の同型類からなる stratum $\mathfrak{M}_{191}$ は 1 点 $[G_{\mathrm{DK}}]$ からなる．（例 3.2 参照．）$\mathrm{ProjAut}(X_{G_{\mathrm{DK}}})$ は $PGL(3, \mathbb{F}_4)$ に等しい．Dolgachev-Kondo [3] は $X_{G_{\mathrm{DK}}}$ の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(X_{G_{\mathrm{DK}}})$ も決定している．

Artin 不変量 2 の超特異 $K3$ 曲面の同型類からなる 3 個の strata $\mathfrak{M}_{188}, \mathfrak{M}_{189}, \mathfrak{M}_{190}$ はいずれも 1 次元であり，アフィン直線 $\mathbb{A}^1$ から原点を取り除いたものと同型である．

$$GA[\lambda] := XYZ\,(X+Y+Z)\left(X^2+Y^2+\left(\lambda^2+\lambda\right)Z^2+XY+YZ+ZX\right)$$

とおく．$\lambda \notin \mathbb{F}_4$ ならば，$[GA[\lambda]]$ は $\mathfrak{M}_{188}$ の点となる．逆に，$\mathfrak{M}_{188}$ の任意の点はある $\lambda \notin \mathbb{F}_4$ により $[GA[\lambda]]$ と表される．

$$J_A(\lambda) := \frac{(\lambda^2+\lambda+1)^3}{\lambda^2\,(\lambda+1)^2}$$

とおく．$\mathfrak{M}$ のなかで $[GA[\lambda]] = [GA[\lambda']]$ となるのは $J_A(\lambda) = J_A(\lambda')$ のときおよびそのときに限る．つまり J_A が $\mathfrak{M}_{188} \cong \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ 上の自然な座標を与える．$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{188})$ は位数 1152 の群であり，$\mathrm{ProjAut}(X_{GA[\lambda]})$ はその位数 96 の部分群となる．$\lambda = \omega$ または　$\lambda = \bar{\omega}$ のとき (すなわち $J_A(\lambda) = 0$ のとき)，$[GA[\lambda]]$ の Artin 不変量は 1 になる，つまり $[GA[\lambda]] = [G_{\mathrm{DK}}]$ となる．

$$\begin{aligned} Q_\lambda &:= (\bar{\omega}\lambda+\omega)\,X^2+\bar{\omega}\,Y^2+\omega\lambda\,Z^2+(\lambda+1)\,XY+(\bar{\omega}\lambda+\omega)YZ+(\lambda+1)\,ZX, \\ GB[\lambda] &:= XYZ\,(X+Y+Z)\,Q_\lambda \end{aligned}$$

とおく．$\lambda \notin \mathbb{F}_4$ ならば，$[GB[\lambda]]$ は $\mathfrak{M}_{189}$ の点となる．逆に，$\mathfrak{M}_{189}$ の任意の点はある $\lambda \notin \mathbb{F}_4$ により $[GB[\lambda]]$ と表される．

$$J_B(\lambda) := \frac{(\lambda+\omega)^{12}}{\lambda^3(\lambda+1)^3(\lambda+\bar{\omega})^3}$$

とおくと，$[GB[\lambda]] = [GB[\lambda']]$ となるのは $J_B(\lambda) = J_B(\lambda')$ のときおよびそのときに限る．つまり J_B が $\mathfrak{M}_{189} \cong \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ 上の自然な座標を与える．$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{189})$ は位数 432 の群であり，$\mathrm{ProjAut}(X_{GB[\lambda]})$ はその位数 18 の部分群となる．$\lambda = \omega$ のとき (すなわち $J_B(\lambda) = 0$ のとき)，$[GB[\lambda]]$ の Artin 不変量は 1 になる，つまり $[GB[\lambda]] = [G_{\mathrm{DK}}]$ となる．

$$GC[\lambda] := XYZ\left(X^3+Y^3+Z^3\right) + (\lambda^4+\lambda)X^3Y^3$$

とおく．$\lambda \notin \mathbb{F}_4$ ならば，$[GC[\lambda]]$ は $\mathfrak{M}_{190}$ の点となる．逆に，$\mathfrak{M}_{190}$ の任意の点はある $\lambda \notin \mathbb{F}_4$ により $[GC[\lambda]]$ と表される．

$$J_C := (\lambda^4+\lambda)^3$$

とおくと，$[GC[\lambda]] = [GC[\lambda']]$ となるのは $J_C(\lambda) = J_C(\lambda')$ のときおよびそのときに限る．つまり J_C が $\mathfrak{M}_{190} \cong \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ 上の自然な座標を与える．$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{190})$ は位数 23040 の群であり，$\mathrm{ProjAut}(X_{GC[\lambda]})$ はその位数 960 の部分群となる．$\lambda \in \mathbb{F}_4$ のとき (すなわち $J_C(\lambda) = 0$ のとき)，$[GC[\lambda]]$ の Artin 不変量は 1 になる，つまり $[GC[\lambda]] = [G_{\mathrm{DK}}]$ となる．

以上のことからわかるように，3 個の strata $\mathfrak{M}_{188}, \mathfrak{M}_{189}, \mathfrak{M}_{190}$ は $\mathfrak{M}$ のなかで 1 点 $[G_{\mathrm{DK}}]$ において交わる．

5　超特異 $K3$ 符号の同型類

No.	σ	basis	l	q	e	tl	lq	qq

$\dim \mathcal{C} = 1.$　　$s(1) = 1.$

0	10		0	0	0	0	0	0

$\dim \mathcal{C} = 2.$　　$s(2) = 3.$

1	9	31	1	0	0	0	0	0
2	9	255	0	1	0	0	0	0
3	9	511	0	0	1	0	0	0

$\dim \mathcal{C} = 3$. $\quad s(3) = 8$.

4	8	31, 481	2	0	0	0	0	0
5	8	31, 8160	1	2	0	0	2	0
6	8	31, 2019	1	1	0	0	0	0
7	8	31, 8161	1	0	2	0	0	0
8	8	255, 3855	0	3	0	0	0	0
9	8	255, 16131	0	2	1	0	0	1
10	8	255, 7951	0	1	2	0	0	0
11	8	511, 32263	0	0	3	0	0	0

$\dim \mathcal{C} = 4$. $\quad s(4) = 21$.

12	7	31, 8160, 481	3	1	0	1	3	0
13	7	31, 2019, 2301	3	0	0	0	0	0
14	7	31, 8160, 516193	2	2	0	0	2	0
15	7	31, 2019, 6244	2	2	0	0	0	0
16	7	31, 8161, 253987	2	1	1	0	0	0
17	7	31, 8160, 123360	1	6	0	0	6	0
18	7	31, 8160, 25059	1	4	0	0	2	2
19	7	31, 2019, 63533	1	3	0	0	0	3
20	7	31, 2019, 14565	1	3	0	0	0	0
21	7	31, 8160, 123361	1	2	4	0	2	0
22	7	31, 8161, 25062	1	2	2	0	0	1
23	7	31, 8161, 254178	1	1	4	0	0	0
24	7	255, 3855, 13107	0	7	0	0	0	0
25	7	255, 3855, 28951	0	6	1	0	0	3
26	7	255, 3855, 62211	0	5	2	0	0	4
27	7	255, 3855, 127249	0	4	3	0	0	3
28	7	255, 16131, 115471	0	3	4	0	0	3
29	7	255, 3855, 29491	0	3	4	0	0	0
30	7	255, 16131, 50973	0	2	5	0	0	1
31	7	255, 7951, 123187	0	1	6	0	0	0
32	7	511, 32263, 233016	0	0	7	0	0	0

$\dim \mathcal{C} = 5.$ $\qquad s(5) = 43.$

33	6	31, 8160, 123360, 1966081	5	0	0	10	0	0
34	6	31, 8160, 25059, 28385	4	1	0	1	3	0
35	6	31, 2019, 6244, 8637	4	1	0	0	0	0
36	6	31, 8160, 25059, 105991	3	5	0	1	7	0
37	6	31, 8160, 25059, 26215	3	5	0	1	3	4
38	6	31, 8161, 253987, 319591	3	3	1	0	0	0
39	6	31, 8160, 25059, 238049	3	3	0	1	3	0
40	6	31, 8160, 25059, 42497	3	3	0	0	2	1
41	6	31, 8160, 516193, 582560	2	6	0	0	6	0
42	6	31, 8160, 25059, 100324	2	6	0	0	4	6
43	6	31, 8160, 25059, 44583	2	6	0	0	2	6
44	6	31, 2019, 63533, 68551	2	6	0	0	0	12
45	6	31, 2019, 6244, 27049	2	6	0	0	0	0
46	6	31, 8160, 25059, 492257	2	4	2	0	2	2
47	6	31, 8161, 253987, 271302	2	4	2	0	0	5
48	6	31, 8161, 253987, 288708	2	4	2	0	0	2
49	6	31, 8160, 123360, 419424	1	14	0	0	14	0
50	6	31, 8160, 25059, 241184	1	10	0	0	6	12
51	6	31, 8160, 25059, 124512	1	10	0	0	6	12
52	6	31, 8160, 25059, 492069	1	8	0	0	2	12
53	6	31, 8160, 25059, 42605	1	8	0	0	2	6
54	6	31, 8160, 123360, 419425	1	6	8	0	6	0
55	6	31, 8160, 25059, 99948	1	6	4	0	2	8
56	6	31, 8160, 25059, 238119	1	6	4	0	2	8
57	6	31, 8161, 25062, 99051	1	6	2	0	0	9
58	6	31, 8161, 25062, 42602	1	6	2	0	0	3
59	6	31, 8160, 25059, 239201	1	4	8	0	2	2
60	6	31, 8161, 25062, 229998	1	4	6	0	0	6
61	6	31, 8161, 25062, 501288	1	4	6	0	0	3
62	6	255, 3855, 13107, 21845	0	15	0	0	0	0
63	6	255, 3855, 28951, 46881	0	13	2	0	0	12
64	6	255, 3855, 28951, 492145	0	11	4	0	0	16
65	6	255, 3855, 62211, 208947	0	9	6	0	0	18
66	6	255, 3855, 28951, 233577	0	9	6	0	0	15
67	6	255, 3855, 13107, 116021	0	9	6	0	0	12
68	6	255, 3855, 127249, 405606	0	7	8	0	0	12
69	6	255, 3855, 28951, 111147	0	7	8	0	0	9

70	6	255, 3855, 13107, 54613	0	7	8	0	0	0
71	6	255, 16131, 115471, 412723	0	5	10	0	0	10
72	6	255, 3855, 127249, 144998	0	5	10	0	0	7
73	6	255, 3855, 62211, 79157	0	5	10	0	0	4
74	6	255, 16131, 115471, 396597	0	3	12	0	0	3
75	6	255, 3855, 29491, 230741	0	3	12	0	0	0

$\dim \mathcal{C} = 6. \qquad s(6) = 58.$

76	5	31, 8160, 25059, 238049, 3618	6	0	0	10	0	0
77	5	31, 2019, 6244, 8637, 19179	6	0	0	0	0	0
78	5	31, 8160, 25059, 105991, 26232	5	8	0	10	8	0
79	5	31, 8160, 25059, 105991, 147041	5	4	0	2	8	0
80	5	31, 8160, 25059, 42605, 26781	5	4	0	1	3	3
81	5	31, 8161, 253987, 288708, 894990	4	7	2	0	0	0
82	5	31, 8160, 25059, 238119, 25661	4	7	0	1	7	4
83	5	31, 8160, 25059, 42605, 98704	4	7	0	1	5	8
84	5	31, 8160, 25059, 492069, 534498	4	7	0	0	4	10
85	5	31, 8160, 25059, 105991, 394851	3	13	0	1	15	24
86	5	31, 8160, 25059, 105991, 42605	3	13	0	1	15	0
87	5	31, 8160, 25059, 238119, 377379	3	13	0	1	11	28
88	5	31, 8160, 25059, 105991, 434281	3	13	0	1	7	32
89	5	31, 8160, 25059, 42605, 2724	3	13	0	1	3	12
90	5	31, 8161, 253987, 271302, 901198	3	9	3	0	0	27
91	5	31, 8160, 25059, 42605, 100414	3	9	2	0	2	13
92	5	31, 8160, 25059, 238119, 49277	3	9	1	0	4	17
93	5	31, 8160, 25059, 105991, 140901	3	9	0	1	7	8
94	5	31, 8160, 25059, 238119, 1736	3	9	0	1	3	18
95	5	31, 8160, 25059, 492069, 106180	3	9	0	0	6	15
96	5	31, 8160, 25059, 124512, 951009	3	9	0	0	6	9
97	5	31, 8160, 25059, 238119, 1869504	2	14	0	0	8	36
98	5	31, 8160, 25059, 492069, 1615373	2	14	0	0	4	42
99	5	31, 8160, 25059, 42605, 101942	2	14	0	0	4	30
100	5	31, 8160, 25059, 241184, 370273	2	10	4	0	6	12
101	5	31, 8160, 25059, 492069, 101592	2	10	4	0	4	24
102	5	31, 8160, 25059, 238119, 884843	2	10	4	0	4	18
103	5	31, 8160, 25059, 238119, 888353	2	10	4	0	2	24
104	5	31, 8161, 253987, 288708, 622825	2	10	4	0	0	30

105	5	31, 8161, 253987, 288708, 796873	2	10	4	0	0	24
106	5	31, 8161, 253987, 288708, 567406	2	10	4	0	0	12
107	5	31, 8160, 123360, 419424, 699040	1	30	0	0	30	0
108	5	31, 8160, 25059, 124512, 494240	1	22	0	0	14	56
109	5	31, 8160, 25059, 124512, 396941	1	18	0	0	6	60
110	5	31, 8160, 25059, 124512, 166317	1	18	0	0	6	54
111	5	31, 8160, 25059, 124512, 43685	1	18	0	0	6	36
112	5	31, 8160, 123360, 419424, 699041	1	14	16	0	14	0
113	5	31, 8160, 25059, 238119, 828508	1	14	8	0	6	40
114	5	31, 8160, 25059, 238119, 372292	1	14	8	0	6	40
115	5	31, 8160, 25059, 492069, 124520	1	14	4	0	2	48
116	5	31, 8160, 25059, 238119, 885801	1	14	4	0	2	42
117	5	31, 8160, 25059, 42605, 101044	1	14	4	0	2	24
118	5	31, 8160, 25059, 124512, 436897	1	10	16	0	6	12
119	5	31, 8160, 25059, 238119, 296165	1	10	12	0	2	26
120	5	31, 8160, 25059, 42605, 477857	1	10	12	0	2	20
121	5	31, 8161, 25062, 99051, 427305	1	10	10	0	0	30
122	5	31, 8161, 25062, 99051, 173347	1	10	10	0	0	24
123	5	255, 3855, 28951, 492145, 538402	0	25	6	0	0	60
124	5	255, 3855, 28951, 492145, 564498	0	21	10	0	0	66
125	5	255, 3855, 28951, 492145, 558755	0	21	10	0	0	60
126	5	255, 3855, 28951, 492145, 110650	0	17	14	0	0	58
127	5	255, 3855, 28951, 492145, 623923	0	17	14	0	0	52
128	5	255, 3855, 28951, 233577, 893570	0	13	18	0	0	42
129	5	255, 3855, 13107, 116021, 415508	0	13	18	0	0	42
130	5	255, 3855, 28951, 492145, 570411	0	13	18	0	0	36
131	5	255, 3855, 28951, 111147, 398693	0	9	22	0	0	24
132	5	255, 3855, 127249, 144998, 284986	0	9	22	0	0	24
133	5	255, 3855, 62211, 208947, 87381	0	9	22	0	0	18

$\dim \mathcal{C} = 7$. $s(7) = 41$.

134	4	31, 8160, 25059, 238119, 1736, 1867799	7	7	0	11	9	0
135	4	31, 8160, 25059, 105991, 394851, 139649	7	7	0	7	21	0
136	4	31, 8160, 25059, 105991, 434281, 614571	7	7	0	3	9	12
137	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183	6	12	0	3	15	24
138	4	31, 8160, 25059, 42605, 2724, 987586	6	12	0	2	6	18
139	4	31, 8160, 25059, 492069, 534498, 1812520	6	12	0	0	12	30

140	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 29575	5	24	0	10	24	96
141	4	31, 8160, 25059, 105991, 26232, 43689	5	24	0	10	24	0
142	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1058259	5	16	0	2	16	44
143	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 7297	5	16	0	2	16	20
144	4	31, 8160, 25059, 238119, 49277, 516264	5	16	0	1	11	53
145	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1409677	4	19	2	0	8	74
146	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 52788	4	19	0	1	13	70
147	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1474759	4	19	0	1	9	66
148	4	31, 8160, 25059, 238119, 49277, 984106	4	19	0	0	12	78
149	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 103644	3	29	0	1	23	152
150	4	31, 8160, 25059, 105991, 394851, 696425	3	29	0	1	15	184
151	4	31, 8160, 25059, 238119, 377379, 950861	3	29	0	1	15	160
152	4	31, 8160, 25059, 238119, 49277, 281774	3	21	4	0	6	111
153	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1475209	3	21	4	0	6	87
154	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537	3	21	2	0	10	95
155	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1352755	3	21	0	1	15	72
156	4	31, 8160, 25059, 105991, 42605, 141990	3	21	0	1	15	48
157	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 699489	3	21	0	1	7	104
158	4	31, 8160, 25059, 238119, 1869504, 475241	2	30	0	0	12	186
159	4	31, 8160, 25059, 238119, 1869504, 1902665	2	30	0	0	12	162
160	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 321232	2	22	8	0	8	110
161	4	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 167565	2	22	8	0	4	122
162	4	31, 8160, 25059, 238119, 888353, 1355336	2	22	8	0	4	122
163	4	31, 8160, 25059, 124512, 494240, 700700	1	46	0	0	30	240
164	4	31, 8160, 25059, 124512, 396941, 662065	1	38	0	0	14	240
165	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 955584	1	30	16	0	14	176
166	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537	1	30	8	0	6	192
167	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 950861	1	30	8	0	6	192
168	4	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 829089	1	22	24	0	6	120
169	4	31, 8160, 25059, 238119, 296165, 591468	1	22	20	0	2	128
170	4	255, 3855, 28951, 492145, 564498, 42406	0	45	18	0	0	270
171	4	255, 3855, 28951, 492145, 564498, 722490	0	37	26	0	0	246
172	4	255, 3855, 28951, 492145, 564498, 1127602	0	29	34	0	0	190
173	4	255, 3855, 28951, 233577, 893570, 308270	0	21	42	0	0	126
174	4	255, 3855, 13107, 116021, 415508, 714818	0	21	42	0	0	126

$\dim \mathcal{C} = 8$. $\quad s(8) = 13$.

175	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1474759, 475241	9	18	0	20	18	0
176	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 1451537	9	18	0	16	30	48
177	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 57025	9	18	0	9	27	63
178	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 699489	7	31	0	5	35	182
179	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1409677, 1058259	7	31	0	3	33	204
180	3	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 29575, 955584	5	56	0	10	56	576
181	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537, 699489	5	40	0	2	32	324
182	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537, 1474759	5	40	0	1	27	357
183	3	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537, 934222	3	61	0	1	39	744
184	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 1451537, 167565	3	45	6	0	18	495
185	3	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 167565, 1352755	3	45	0	1	15	504
186	3	31, 8160, 25059, 124512, 396941, 662065, 700700	1	78	0	0	30	1008
187	3	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537, 955584	1	62	16	0	14	816

$\dim \mathcal{C} = 9$. $s(9) = 3$.

188	2	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 1451537, 699489	13	28	0	46	60	96
189	2	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 699489, 152785	9	66	0	12	90	864
190	2	31, 8160, 25059, 238119, 372292, 442537, 934222, 1844576	5	120	0	10	120	2880

$\dim \mathcal{C} = 10$. $s(10) = 1$.

191	1	31, 8160, 25059, 238119, 884843, 418183, 1451537, 699489, 929948	21	0	0	210	0	0

参考文献

[1] M. Artin, *Supersingular $K3$ surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 543–567 (1975).

[2] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, third ed., Springer-Verlag, New York, 1999.

[3] I. R. Dolgachev and S. Kondo, *A supersingular $K3$ surface in characteristic 2 and the Leech lattice*, Int. Math. Res. Not. 2003, no. 1, 1–23. (2001).

[4] P. Blass and J. Lang, *Zariski surfaces and differential equations in characteristic* $p > 0$, Marcel Dekker Inc., New York, 1987.

[5] A. N. Rudakov and I. R. Šafarevič, *Supersingular $K3$ surfaces over fields of characteristic* 2, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 4, 848–869: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 614–632.

[6] ———, *Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic*, Current problems in mathematics, Vol. 18, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981, pp. 115–207: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.

[7] I. Shimada, *Lattices of algebraic cycles on Fermat varieties in positive characteristics*, Proc. London Math. Soc. (3) 82 (2001), no. 1, 131–172.

[8] ———, *Rational double points on supersingular $K3$ surfaces*, Math. Comp. **73** (2004), no. 248, 1989–2017 (electronic).

[9] ———, *Supersingular $K3$ surfaces in characteristic* 2 *as double covers of a projective plane*, preprint, to appear in Asian J. Math.
`http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[10] ———, *Supersingular $K3$ surfaces as double covers of the projective plane* (日本語), 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1345, 代数曲線束の局所不変量の研究, 89–108. `http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ronzetsu_j.html`

[11] ———, *Moduli curves of supersingular $K3$ surfaces in characteristic* 2 *with Artin invariant* 2 , preprint.
`http://www.math.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[12] T. Shioda, *Supersingular $K3$ surfaces*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., Vol. 732, Springer, Berlin, 1979, pp. 564–591.

060-0810
札幌市北区北１０条西８丁目
北海道大学理学部数学教室
shimada@math.sci.hokudai.ac.jp