平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

プリント No.1（10 月 1 日配付）

行列演算のうち**和**と**スカラー倍**について思いだそう。正の整数 m, n に対して

$$\boxed{M(m,n,\mathbb{R}) := m \times n \text{ 実行列全体の集合}} \text{ 特に } \boxed{M(n,\mathbb{R}) := M(n,n,\mathbb{R})}$$

$n=1$ なら上は m 項列ベクトル全体 $\mathbb{R}^m$ に他ならない。さて $A, B \in M(m,n,\mathbb{R})$ に対してそれらの和 $A+B$ が定義され、また $c \in \mathbb{R}$ と $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ に対してスカラー倍 cA が定義される。これら 2 つの演算とその抽象化が後期の授業のテーマである。ここで

$$A+B \in M(m,n,\mathbb{R}),\ cA \in M(m,n,\mathbb{R})$$

であり（即ち演算結果がもとの集合に入る）、通常の計算ルール（結合則、分配則など）が適用できることに着目する。（不明瞭な点は直ちに教科書などで確認せよ。）

問題 1. $\mathbb{R}^3$ の元 $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1, x_2, x_3)$ で次のそれぞれについて記述されている性質をもつもの全体 S を考える。例えば (1) なら $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ となる。このとき

$$\text{“}S \neq \emptyset\text{”}, \text{“}\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in S\text{”} \text{ かつ “}c \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in S \Rightarrow c\mathbf{x} \in S\text{”}$$

が成り立つか (1) ～ (6) についてそれぞれ判定し、その理由を述べよ。

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

(2) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

(3) x_1, x_2, x_3 は有理数

(4) $x_1 \leq x_2$, $-x_1 \leq x_2$

(5) $x_1 + 2x_2 = 2x_2 + x_3 = 0$

(6) ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \geq 1$

定義 1. 集合 $V \subset M(m,n,\mathbb{R})$ が次を満たすとき、それを $M(m,n,\mathbb{R})$ の**部分空間**という。

1° $V \neq \emptyset$

2° $A, B \in V \Rightarrow A+B \in V$

3° $c \in \mathbb{R}$, $A \in V \Rightarrow cA \in V$

特に $n=1$ なら上は $\mathbb{R}^m$ の部分空間を定義する。

注 1. (i) $M(m,n,\mathbb{R})$ 自身は $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間である。
(ii) O を $m \times n$ 零行列とすると $\{O\}$ は $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間である。

一般に次が成り立つ（が以下の問題を解くには使わないだろう）。

定理 1. n 変数の**同次**連立 1 次方程式を一つ固定するとき、その解空間は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

問題 2. (1) 無理数全体の集合が $\mathbb{R}$ の部分空間であるか判定し、その理由を述べよ。

(2) 2×3 整数行列全体の集合 $M(2,3,\mathbb{Z})$ が $M(2,3,\mathbb{R})$ の部分空間であるか判定し、その理由を述べよ。

(3) 集合 $S = \{X \in M(2,3,\mathbb{R}) \mid \text{各成分が非負}\}$ が $M(2,3,\mathbb{R})$ の部分空間であるか判定し、その理由を述べよ。

問題 3. V を $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間とする。

(1) O を $m \times n$ 零行列とする。V は $O \in V$ を満たすことを示せ。

(2) 任意の $A \in V$ に対してある $B \in V$ が存在して $A + B = O$ が成り立つことを示せ。

問題 4. (1) $l \times m$ 実行列 A を一つ固定する。このとき

$$V = \{X \in M(m,n,\mathbb{R}) \mid AX = O\} \text{ ここで } O \text{ は } l \times n \text{ 零行列}$$

は $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ。

(2) 次の集合が $M(3,2,\mathbb{R})$ の部分空間であるか判定し、その理由を述べよ。

$$S = \{X \in M(3,2,\mathbb{R}) \mid (3 \quad 1 \quad 2)X = (0 \quad 1)\}$$

(3) 次の集合が $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるか判定し、その理由を述べよ。

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式の解}\}$$

問題 5. 次の各集合は $M(n,\mathbb{R})$ の部分空間であるかそれぞれ判定し、その理由を述べよ。

(1) n 次実対称行列全体

(2) n 次実正則行列全体

(3) n 次正方行列 A を一つ固定する。$AX = XA$ を満たす n 次実正方行列 X の全体

問題 6. V, W を $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間とする。共通部分 $V \cap W$ は $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ。

問題 7. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V を固定し、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in V$ とする。このとき

$$c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r \in V$$

が成り立つことを示せ。

定義 2. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ を係数とする $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の *1* **次結合**あるいは**線形結合**とは次のものをいう。

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r$$

言うまでもないが $M(m, n, \mathbb{R})$ の元についても 1 次結合という概念がある。

問題 8. $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\mathbf{a}$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の 1 次結合で表せ。

(2) $\mathbf{e}_1$ を $\mathbf{a}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の 1 次結合で表せ。

(3) $\mathbf{a}$ を $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1$ の 1 次結合で表せ。

問題 9. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次の

1° $\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合で表せる

2° $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r \quad \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつ

は同値であることを示せ。

問題 10. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せるための a の条件を求め、更にその条件が成り立つ場合に 1 次結合で表せ。

問題 11. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せるための条件を求めよ。

$$\boxed{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle := \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \text{ の 1 次結合全体}}$$

問題 12. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

問題 13. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式の解空間であることを示せ。

定義 3. (i) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。零ベクトル $\mathbf{o}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合で表すような係数は全て 0 のものに限る、即ち

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$$

が成り立つとき、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は *1* **次独立**であるという。
(ii) 1 次独立であることの否定を *1* **次従属**であるという。

問題 14. 1 次従属であることの詳しい条件を書き下せ。

問題 15. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 1 次独立であることを示せ。

(2) $a = 2$ のとき $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ は 1 次独立であることを示せ。

(3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ が 1 次従属となるための a の条件を求めよ。

問題 16. 次のそれぞれについて 1 次独立かどうか判定し、その理由を述べよ。

(1) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(3) $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ （a の値により場合分け必要）

問題 17. (1) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ とする。$\mathbf{a}$ の 1 次独立性は $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ と同値であることを示せ。

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。どれか 1 つが零ベクトルであれば、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は 1 次従属であることを示せ。

問題 18. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。その 1 次独立性は

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_r\mathbf{a}_r = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_r\mathbf{a}_r \Rightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_r) = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$$

が成り立つことと同値であることを示せ。