# 平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

**プリント No.2**（10 月 8 日配付）

**問題 1.** 次のそれぞれについて 1 次従属となるための条件を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1\\a\\a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\1\\a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\\1\\a\end{pmatrix}.$ (2) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\b\\2\end{pmatrix}.$

**問題 2.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立であるとする。次のそれぞれについて 1 次独立であるであるか判定し、その理由を述べよ。

(1) $r \geq 3$ であるとき $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$.

(2) $r \geq 4$ であるとき $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1$.

(3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_r$.

記号の再確認：$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle := \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合全体

**問題 3.** $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix}$ とする。

(1) 行列 $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_5)$ を標準階段行列に行基本変形せよ。

(2) 上で求めた標準階段行列を $(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4 \quad \mathbf{b}_5)$ とする。$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3$ は 1 次独立であり $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = \langle \mathbf{b}_1 \rangle, \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5 \rangle = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3 \rangle$ が成り立つことを確かめよ。

(3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ の 1 次独立性 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle$ の成立を確かめよ。

**問題 4.** （問題 3 の発展問題）$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が以下で与えられたとする。

(1) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\\2\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}5\\-7\\6\\3\end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}7\\1\\2\\7\end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix}6\\9\\-4\\8\end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\\2\end{pmatrix}$

それぞれについて番号 $i(1) < i(2) < \cdots < i(s) \leq r$ を選び出して $\mathbf{a}_{i(1)}, \mathbf{a}_{i(2)}, \ldots, \mathbf{a}_{i(s)}$ が 1 次独立であり、$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = \langle \mathbf{a}_{i(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{i(s)} \rangle$ が成り立つように構成せよ。

**問題 5.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。$B \in M(m, n, \mathbb{R})$ に対して次を示せ。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が 1 次従属ならば $B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_r$ も 1 次従属である。

(2) $m = n$ かつ $B$ は正則行列であるとする。このとき $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次独立性と $B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_r$ の 1 次独立性は同値である。

**定理 1.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ と行列 $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r)$ について以下の同値性が成り立つ。

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \text{ 1 次従属} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r) < r$$
$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \text{ 1 次独立} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r) = r$$

**問題 6.** 定理 1 を証明せよ。ヒント：基本変形と問題 5 (2)

**問題 7.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立であるとする。

(1) $r \geq 2$ のとき $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{r-1}$ も 1 次独立であることを示せ。

(2) $\sigma$ を $r$ 文字の置換であるとする。$\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathbf{a}_{\sigma(r)}$ も 1 次独立であることを示せ。

**問題 8.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき次が成り立つことを示せ。

$$\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$$

**定理 2.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき以下の $1^\circ \sim 3^\circ$ は互いに同値である。

$1^\circ$ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は 1 次独立

$2^\circ$ $\forall i\ \mathbf{a}_i \notin \langle \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots \rangle$

$3^\circ$ $\forall i\ \langle \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots \rangle \neq \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$

**問題 9.** 定理 2 を証明せよ。ヒント：$1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$ については対偶、即ち次の方が考えやすい。

$$\exists i\ \mathbf{a}_i \in \langle \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots \rangle \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \text{ 1 次従属}$$

**問題 10.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$, $C \in M(r, s, \mathbb{R})$ とする。$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ を次で定める。

$$\mathbf{b}_1 := \sum_{i=1}^{r} c_{i1}\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_2 := \sum_{i=1}^{r} c_{i2}\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{b}_s := \sum_{i=1}^{r} c_{is}\mathbf{a}_i \text{ ここで } c_{ij} \text{ は行列 } C \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

(1) $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_s)$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{o}$ をみたすとする。このとき $x_1, x_2, \ldots, x_s$ を係数とする $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ の 1 次結合は $\mathbf{o}$ に等しいことを示せ。

(2) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ は 1 次独立であると仮定する。$C$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式は自明解のみを持つことを示せ。

(3) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ が 1 次独立であるなら $s \leq r$ であることを示せ。

**注 1.** 問題 10 の設定において次の関係が成り立つ。

$$(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_r)C = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_s)$$

問題 10 を使って次の定理が証明できる。

**定理 3.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s \text{ 1 次独立}, \forall i \ \mathbf{b}_i \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle \Rightarrow s \leq r$$

**問題 11.** 第 $i$ 成分だけが 1 で他の成分は 0 であるような $n$ 項列ベクトルを $\mathbf{e}_i$ と書く。このとき $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ は 1 次独立であり、$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$ を満たすことを示せ。

**問題 12.** （定理 3 の応用）$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ が 1 次独立なら $r \leq n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle = \mathbb{R}^n$ なら $n \leq r$ が成り立つことを示せ。

**定義 1.** $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V$ の**基底**とは次の 2 条件を満たす組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in V$ をいう。

1° $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ は 1 次独立

2° $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle = V$

**問題 13.** 組 (1) は $\mathbb{R}^3$ の基底であり、組 (2) は $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**問題 14.** 次の 2 組についてそれぞれが $\mathbb{R}^3$ の基底であるための条件を求めよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

**問題 15.** （問題 3 の発展問題）それぞれについて番号 $i(1) < i(2) < \cdots < i(s) \leq r$ を選び出して $\mathbf{a}_{i(1)}, \mathbf{a}_{i(2)}, \dots, \mathbf{a}_{i(s)}$ が $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ の基底となるように構成せよ。

(1) $r = 5$, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) $r = 4$, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

**定理 4.** $V$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in V$ とする。このとき組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が $V$ の基底であることは次が成り立つことと同値である。

任意の $\mathbf{x} \in V$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合で表され、しかも表し方は一意的である。

**定義 2.** $V$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間、組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ をその基底とする。このとき各 $\mathbf{x} \in V$ に対して一意的に決定される 1 次結合の係数 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ を並べてできる列ベクトルを $\mathbf{x}$ の基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ に関する**座標**という。

**問題 16.** (1) 次の 2 組は共に $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ と } \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) 基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ に関する座標と基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ に関する座標の関係を求めよ。

**問題 17.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき次が成り立つことを示せ。

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \text{ 1 次独立}, \mathbf{b} \notin \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \Rightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b} \text{ 1 次独立}$$

**定理 5.** $V$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間であり、$V \neq \{\mathbf{o}\}$ であるものとする。
(i) $V$ の基底が存在する。
(ii) $V$ の基底の一つを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ とする。このとき $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s \in V$ に対して

1° $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ が 1 次独立なら $s \leq r$ が成り立つ

2° $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s \rangle = V$ なら $r \leq s$ が成り立つ

(iii) 組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ と組 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ がともに $V$ の基底であるなら $r = s$ が成り立つ。

**定理 6.** $V$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in V$ とする。このとき $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が 1 次独立なら、いくつか $V$ の元 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ を付加して組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ が $V$ の基底であるようにすることができる。

**定理 7.** $V$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in V$ とする。このとき $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = V$ であるなら、番号 $i(1) < i(2) < \cdots < i(s) \leq r$ を選び出して $\mathbf{a}_{i(1)}, \mathbf{a}_{i(2)}, \ldots, \mathbf{a}_{i(s)}$ が $V$ の基底であるようにすることができる。

**注 2.** (i) 定理 6 において、組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ がすでに $V$ の基底である場合は、付加する必要はない。この場合は $s = 0$ であると解釈する。
(ii) 定理 7 において、組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ がすでに $V$ の基底である場合は、選び出す必要はない。この場合は $s = r$ であると解釈する。

**問題 18.** 定理 5 を証明せよ。(i) のヒント：問題 17 と問題 12(i). (ii) のヒント：定理 3

**問題 19.** 定理 6 を証明せよ。ヒント：定理 5(i) の証明を再検討せよ。

**問題 20.** 定理 7 を証明せよ。ヒント：定理 2

**定義 3.** (i) $V$ を $\{\mathbf{o}\}$ でない $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。定理 5(i), (iii) により、$V$ の基底を構成する元の個数が確定する。これを $V$ の**次元**といい、記号 $\dim V$ によって表す。
(ii) $\{\mathbf{o}\}$ も $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるが、その次元は 0 と約束する。即ち $\dim\{\mathbf{o}\} = 0$ である。

**問題 21.** 以下のそれぞれを係数行列とする同次連立 1 次方程式について、解空間の次元および（次元が 0 でないときには）解空間の基底を一組求めよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{（場合分け必要）}$$

**定義 4.** 同次連立 1 次方程式を一つ固定する。その解空間の次元を**解の自由度**という。解の自由度が 0 でないとき解空間の基底を**基本解**ともいう。

**定理 8.** $A$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式について次の関係が成り立つ。

$$A \text{ の列の数} = A \text{ の階数} + \text{解の自由度}$$

**問題 22.** $V$ を $\dim V = r \neq 0$ であるような $\mathbb{R}^n$ の部分空間、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in V$ とする。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が 1 次独立なら $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = V$ が成り立つことを示せ。

(2) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = V$ なら $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は 1 次独立であることを示せ。

(1) のヒント：問題 17. (2) のヒント：定理 2

**定理 9.** $A \in M(n, r, \mathbb{R})$ に対してそのブロック分けを $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r)$ とする。
(i) $\operatorname{rank} A = \dim\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ が成り立つ。
(ii) $r = n$ とする。このときが成り立つ。

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \text{ 1 次独立} \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

**問題 23.** 定理 9 を証明せよ。(i) のヒント：基本変形と問題 5(2)

**問題 24.** 次のそれぞれについて 1 次独立になるための条件を求めよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ bc \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ ac \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ ab \\ c \end{pmatrix}. \quad (2)\quad \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}.$$

列ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 以外にも、和とスカラー倍という演算が自然に備わり、通常の計算ルール（結合則、分配則など）が適用できる対象が多くある。それを抽象化（公理化）したものが線形空間である。ここでは典型的な例を挙げるにとどめる。

**例 1.** 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された実数値関数の全体を $F$ と書く。

1° $f, g \in F$ に対し $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ によって和 $f + g$ を定義する。

2° $f \in F$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し $(cf)(x) := cf(x)$ によってスカラー倍 $cf$ を定義する。

**例 2.** 実数列の全体を $S$ と書く。

1° $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$ に対し $\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\}$ によって和 $\{a_n\} + \{b_n\}$ を定義する。

2° $\{a_n\} \in S$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し $c\{a_n\} := \{ca_n\}$ によってスカラー倍 $c\{a_n\}$ を定義する。

**例 3.** $x$ の実係数多項式の全体は $\mathbb{R}[x]$ という記号で表されることが多い。多項式としての和とスカラー倍により演算を定義する。

**問題 25.** $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の全体がなす線形空間 $F$ において、次の部分集合は部分空間であるか判定せよ。

(1) 奇関数の全体

(2) 有界な連続関数の全体

(3) $\forall x\ f(x) \geq 0$ をみたす関数全体

**問題 26.** 実数列全体がなす線形空間 $S$ において、次は部分空間であるか判定せよ。

(1) 等差数列全体

(2) 等比数列全体

(3) 有限個を除き、残りすべての項が 0 であるような実数列の全体

(4) 漸化式 $x_{n+2} + \alpha x_{n+1} + \beta x_n = 0$ を満たす実数列の全体

**問題 27.** $V$ を線形空間、その零元を $o$ とする。

(1) ある $o' \in V$ が $\forall v \in V\ v + o' = v$ を満たすなら、それは零元 $o$ であることを示せ。零元の一意性

(2) $v \in V$ とする。ある $u \in V$ が $v + u = o$ を満たすなら、それは $v$ の逆元 $-v$ であることを示せ。$v$ の逆元の一意性

**問題 28.** $V$ を線形空間、その零元を $o$ とする。

(1) $v \in V$ とする。$0v = o$ であることを示せ。

(2) $c \in \mathbb{R}$ とする。 $co = o$ であることを示せ。

(3) $v \in V$ とする。$(-1)v = -v$ であることを示せ。ここで $(-1)v$ は $v$ の $-1$ 倍であり、$-v$ は $v$ の逆元である。区別せよ。