平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜1・2 時限,総合科学部 K203 プリント No.3 (10月22日配付)

集合 X, Y が与えられたとき X から Y への写像 f を次のように表す。

$$f: X \to Y$$
 あるいは $X \stackrel{f}{\longrightarrow} Y$

定義 1. 写像 $f: X \to Y$ に対して次で定める集合を f の像という。

$$\boxed{\operatorname{Im} f := \{ y \in Y \mid \exists x \in X \ y = f(x) \}}$$

数学概説で取り扱った事項をいくつか確認しておこう。

- 1° 写像の定義域、写像の値域
- 2° 写像の単射性、写像の全射性、写像の全単射性
- 3° 合成写像、恒等写像、逆写像

上の項目に少しでも不明瞭な点があるなら直ちに教科書などで確認せよ。

約束:この演習では、列ベクトル空間 \mathbb{R}^d の部分集合として部分空間が規定されている。しかし入れ物としての \mathbb{R}^d を強調する必要がない場合もある。そのようなときは単に部分空間ということにする。

定義 2. 部分空間 V から部分空間 W への写像 $f:V\to W$ について、それが線形であると は次の 2 条件が成り立つことをいう。

$$1^{\circ} \mathbf{x}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{v})$$

$$2^{\circ} \ c \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V \Rightarrow f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$$

特にV=Wであって、定義域と値域が同じことを強調するときは、線形変換という。

約束:本来なら「部分空間Vから部分空間Wへの線形写像 $f:V\to W$ 」というべきだが、今後は、定義域Vと値域Wに関する情報を省略して線形写像 $f:V\to W$ という表現をする。

問題 1. 次の写像は線形であるかそれぞれ判定しその理由を述べよ。

$$(1) \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 \end{pmatrix}. \quad (2) \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}. \quad (4) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

平成 20 年度 線形代数学演習 II (担当:岩田 / TA:藤原、富永) 10 月 22 日 1

問題 2. 次を満たすような線形写像が存在するかそれぞれ判定し、その理由を述べよ。

$$(1) \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ \texttt{であって} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \ \texttt{かつ} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \, \text{であって} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \, \text{かつ} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

問題 3. 次の写像は線形であるかそれぞれ判定し、その理由を述べよ。

- (1) $M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \mapsto \operatorname{tr} X$.
- (2) $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ と $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ を与えたとき $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. (場合分け必要) 問題 4. 次の写像は線形であるかそれぞれ判定し、その理由を述べよ。
 - (1) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき $M(m, n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m, X \mapsto X\mathbf{a}$.
 - (2) $M(m, n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}), X \mapsto {}^{\mathrm{t}}XX$.

問題 5. (1) 次の写像はそれぞれ線形であることを確かめ、それらの合成写像を求めよ。

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

- (2) 線形写像 $f:V\to W, g:W\to U$ の合成 $g\circ f:V\to U$ も線形であることを示せ。
- 問題 6. (1) 線形写像 $f:V\to W$ に対して $f(\mathbf{o})=\mathbf{o}$ (\mathbf{o} は零元) が成り立つことを示せ。
 - (2) 線形写像 $f:V\to W$ と $\mathbf{x}\in V$ に対して $f(-\mathbf{x})=-f(\mathbf{x})$ が成り立つことを示せ。

問題 7. 部分空間 V、部分空間 W と $\mathbf{b} \in W$ を固定する。定数写像 $V \to W$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}$ が線形であるための必要十分条件を求めよ。

問題 8. 線形写像 $f: V \to W$ について次が成り立つことを示せ。

$$c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}, \ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V \Rightarrow f(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r) = c_1f(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_rf(\mathbf{v}_r)$$

問題 9. 線形写像 $f:V\to W$ と $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\in V$ について次が成り立つことを示せ。

$$f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$$
 1 次独立 $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 1 次独立

定義 3. 線形写像 $f:V\to W$ に対して次で定めるものを f の核という。

$$\operatorname{Ker} f := \{ \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \}$$
(o は W の零元)

平成 20 年度 線形代数学演習 II (担当:岩田 / TA:藤原、富永) 10 月 22 日 2

問題 10. 次の線形写像についてそれぞれ核が部分空間になることを確かめ、その次元および(次元が0でないときには)核の基底を一組求めよ。

$$(1) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ 3x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

問題 11. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ を与えて、線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ について考える。

- (1) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$ が成り立つことは、A を係数行列とする同次連立 1 次方程式について、その解の自由度が 0 であることと同値であることを示せ。
- (2) $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^n$ が成り立つことは A が零行列であることと同値であることを示せ。

問題 12. 線形写像 $f: V \to W$ に対して $\operatorname{Ker} f$ は V の部分空間であることを示せ。

問題 13. (1) 写像 $M(3,\mathbb{R}) \to M(3,\mathbb{R}), X \mapsto X - {}^{\mathrm{t}}X$ は線形であることを確認せよ。

(2) 小問(1)で与えた写像について、核の次元および(次元が0でないときには)核の 基底を一組求めよ。

問題 14. 線形写像 $f:V\to W$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$f$$
 単射 \Leftrightarrow Ker $f = \{ \mathbf{o} \}$

問題 15. 線形写像 $f:V\to W$ に対して $\operatorname{Im} f$ は W の部分空間であることを示せ。

問題 16. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ を与えて、線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ について考える。

- (1) Aのブロック分けを $(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ とする。 $\operatorname{Im} f = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ を示せ。
- (2) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$ が成り立つことを示せ。
- (3) 写像 f が全射であることは、任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して $(A \ \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする 連立 1 次方程式が解を持つことと同値であることを示せ。

問題 17. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ を以下のように与えて、線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ を考える。それぞれ像の次元および(次元が0 でないときには)像の基底を一組求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} (場合分け必要)$$

問題 18. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ を以下のように与えて、線形写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ を考える。それぞれについて単射性と全射性を判定し、全単射であるときは逆写像を求めよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix} (場合分け必要)$$

平成 20 年度 線形代数学演習 II (担当:岩田 / TA:藤原、富永) 10 月 22 日 3

問題 19. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ を与えて、線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ について考える。

- (1) 写像 f の単射性は $\operatorname{rank} A = n$ と同値であることを示せ。
- (2) 写像 f の全射性は $\operatorname{rank} A = m$ と同値であることを示せ。

問題 20. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ を与えて、線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ について考える。このとき写像 f が全単射であるための A に関する条件を求めよ。

問題 21. 部分空間 $V \geq \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$ を与えて、次の写像について考える。

$$f: \mathbb{R}^r \to V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \mapsto x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_r \mathbf{v}_r$$

- (1) 写像 f の単射性は $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ の 1 次独立性と同値であることを示せ。
- (2) 写像 f の全射性は $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = V$ が成り立つことと同値であることを示せ。

定義 4. 部分空間 V から部分空間 W への写像 $f:V\to W$ について、それが同型写像であるとは、 f が線形かつ全単射であることをいう。

例 1. 部分空間 V に対して、その恒等写像 $V \rightarrow V$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ は同型写像である。

問題 22. 部分空間 V について、その基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ を選んでおく。写像

$$V \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$$
 の基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ に関する座標

は同型写像であることを示せ。

問題 23. 部分空間 V から部分空間 W への同型写像 $f:V\to W$ が与えられたとする。このとき $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\in V$ に対して次が成り立つことを示せ。

- (1) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ が 1 次独立であるなら $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ も 1 次独立である。
- (2) $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = V$ が成り立つなら $\langle f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r) \rangle = W$ も成り立つ。
- $(3) \dim V = \dim W$ が成り立つ。

問題 24. 同型写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と \mathbb{R}^n の部分空間 V に対して次を示せ。

- $f(V) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} \in V \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \}$ は部分空間である。
- (2) dim $V = \dim f(V)$ が成り立つ。
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \in V\}$ は部分空間であり、その次元は $\dim V$ に等しい。

問題 25. 部分空間 V から部分空間 W への同型写像 $f:V\to W$ が与えられたとする。このとき f の逆写像 $f^{-1}:W\to V$ も線形であることを示せ。