平成 20 年度 線形代数学演習 II プリント No.3 (10月22日配付)略解

問題 1. 線形でないものについてのみ理由を述べる。

- (2) $^{t}(0$ 0) における値が $^{t}(0$ 1) であり、零ベクトルでない。
- (3) 0 における値が $^{t}(1 \ 0)$ であり、零ベクトルでない。
- (4) 写像を記号 f で表し、また $e := {}^{t}(1 \ 0 \ 0)$ とする。このとき

$$f(\mathbf{e} + \mathbf{e}) = 4 \neq 2 = f(\mathbf{e}) + f(\mathbf{e})$$

$$(2) 線形写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ \frac{5}{2}x_1 - 10x_2 - \frac{15}{2}x_3 \end{pmatrix}$ が条件を満たす。$$

問題 3. (2) $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ のとき線形であり、 $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ のとき線形でない。

問題 $\bf 4.~(2)$ 線形でない。その理由:(1,1) 成分が1 であり、それ以外の成分が0 であるような $m \times n$ 行列を A とおく。このとき $^{\rm t}AA$ は (1,1) 成分が1 であり、それ以外の成分が0 であるような n 次正方行列である。よって

$${}^{t}(A+A)(A+A) = 4{}^{t}AA \neq {}^{t}AA + {}^{t}AA$$

問題 5.
$$(1)$$
 合成写像は $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 - 5x_2 - x_3 \\ 20x_1 + 22x_2 + 10x_3 \end{pmatrix}$

$$(2) g(f(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x})) + g(f(\mathbf{y})), g(f(c\mathbf{x})) = g(cf(\mathbf{x})) = cg(f(\mathbf{x})).$$

問題 6. (1) $f(\mathbf{o}) = f(\mathbf{o} + \mathbf{o}) = f(\mathbf{o}) + f(\mathbf{o})$.

(2)
$$f(-\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x} + \mathbf{x}) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$$
.

問題 7. 必要十分条件はb = oである。

問題 8. 個数 r についての帰納法を適用する。r=1 のときは、スカラー倍についての性質に他ならない。 $r \leq k$ のときに成り立つと仮定する。r=k+1 のときを検討する。帰納法の仮定により次が成り立つ。

$$f(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1f(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kf(\mathbf{v}_k)$$

平成 20 年度 線形代数学演習 II (担当:岩田 / TA:藤原、富永) 10 月 22 日略解 1

もちろん $f(c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = c_{k+1}f(\mathbf{v}_{k+1})$ も成り立つ。更に和についての性質により

$$f(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = f((c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k) + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1})$$

= $f(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k) + f(c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = c_1f(\mathbf{v}_1) + \dots + c_kf(\mathbf{v}_k) + c_{k+1}f(\mathbf{v}_{k+1})$

よってr = k + 1のときも成り立つことが示せた。

問題 9. $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ の 1 次独立性を仮定する。 さて c_1, \ldots, c_r が \mathbf{o} を表す $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ の 1 次結合係数なら次が成り立つ。

$$c_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + c_r f(\mathbf{v}_r) = f(c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_r \mathbf{v}_r) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$$

 $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ は 1 次独立性なので c_1, \ldots, c_r はすべて 0 である。

問題 10. 対応する同次連立1次方程式を解く。行基本変形は次の通り。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 次元は0 (2) 次元は1で基底は^t(2 1 1)

問題 11. (1) $\operatorname{Ker} f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o} \} =$ 同次連立 1 次方程式の解

(2) Ker $f = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ A\mathbf{x} = \mathbf{o} \Leftrightarrow A$ 零行列

問題 12. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \ f(\mathbf{y}) = \mathbf{o} \Rightarrow f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}.$ $c \in \mathbb{R}, \ \mathbf{x} \in \text{Ker } f \Rightarrow c \in \mathbb{R}, \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \Rightarrow f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{o} = \mathbf{o}.$

問題 13. 核は3次対称行列全体である。基底としては以下がその例である。次元は6

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 14. f の単射性を仮定する。 $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ であるから、 $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$ が従う。 $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$ と仮定する。このとき $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ とすると

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$$
 即ち $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Ker } f$

となるので x - y = o を得る。よって f は単射である。

問題 15. $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \operatorname{Im} f$ とする。このとき $\exists \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \ f(\mathbf{x}') = \mathbf{y}'$ であり、よって

$$\mathbf{y} + \mathbf{y}' = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \in \text{Im } f$$

 $c \in \mathbb{R}, y \in \text{Im } f$ とする。このとき $\exists \mathbf{x} \in V \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ であり、よって

$$c\mathbf{y} = cf(\mathbf{x}) = f(c\mathbf{x}) \in \text{Im } f$$

平成 20 年度 線形代数学演習 II (担当:岩田 / TA:藤原、富永) 10 月 22 日略解 2

問題 16. (1) まず $\mathbf{v} \in \text{Im } f$ とする。このとき $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ であり、

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$$
. 但し $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \dots, x_n)$

次に $\mathbf{y} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ とする。その 1 次結合係数を表す列ベクトル \mathbf{x} に対して

$$\mathbf{y} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = A\mathbf{x} = f(\mathbf{x}) \in \text{Im } f.$$

- (2) (1) とプリント No.2 定理 9 より dim Im $f = \dim \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \operatorname{rank} A$.
- (3) $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ とする。 $(A \ \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解を持つことは $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \operatorname{Im} f$ が成り立つことと同値である。

問題 17. 与えられた行列を基本変形する。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 次元は2で、基底は \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & a(a-3) \end{pmatrix} a = 0: 次元 = 1, 基底 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
 $a=3$: 次元 = 2, 基底 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $a \neq 0$ かつ $a \neq 3$: 次元 = 3. 基底省略

問題 18. 与えられた行列を基本変形する。

$$(2) \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix} a = 1$$
なら単射でも全射でも

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1/(1-a) - x_2/(1-a)^2 \\ x_2/(1-a) \\ -x_2/(1-a)^2 + x_3/(1-a) \end{pmatrix}$$

問題 **19.** (1) 問題 11 と問題 14 により写像 f の単射性は A を係数行列とする同次連立 1 次方程式について、その解の自由度が 0 であることと同値である。

(2) 問題 16 により写像 f の全射性は、任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して $(A \ \mathbf{b})$ を拡大係数行列 とする連立 1 次方程式が解を持つことと同値である。

問題 20. 問題 19 における考察より、全単射性は $\operatorname{rank} A = n$ かつ $\operatorname{rank} A = m$ であること と同値である。よって A が正則な正方行列であることが必要十分条件である。

問題 21. (1) プリント No.1 の問題 18 で考察したように、 v_1, \ldots, v_r の 1 次独立性は

$$x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_r\mathbf{v}_r = y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_r\mathbf{v}_r \Rightarrow (x_1, \dots, x_r) = (y_1, \dots, y_r)$$

が成り立つことと同値である。上は写像 f の単射性を意味する。

(2) 生成条件 $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = V$ は $\forall \mathbf{y} \in V \exists x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R} \ x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_r \mathbf{v}_r = \mathbf{y}$ のことである。これは写像 f の全射性を意味する。

問題 22. 問題 21 における考察より、次の写像は全単射である。

$$\mathbb{R}^n \to V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

これの逆写像がまさに今検討している写像である。あとは線形性をチェックすればよい。

問題 23. (1) c_1, \ldots, c_r が o を表す $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ の 1 次結合係数なら次が成り立つ。

$$f(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r) = c_1f(\mathbf{v}_1) + \dots + c_rf(\mathbf{v}_r) = \mathbf{o}$$

f の単射性により $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$ なので $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{o}$ となる。 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ は 1 次独立であるから c_1, \ldots, c_r はすべて 0 である。

- (2) $\mathbf{y} \in W$ とする。f の全射性と生成条件 $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = V$ により $\exists \mathbf{x} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ が成り立つ。 \mathbf{x} を表す $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ の 1 次結合の係数を c_1, \dots, c_r とすると $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r) = c_1f(\mathbf{v}_1) + \dots + c_rf(\mathbf{v}_r) \in \langle f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r) \rangle$ が成り立つ。逆の包含関係 $\langle f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r) \rangle \subset W$ は明らか。
- (3) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ が V の基底であるなら $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r)$ は W の基底である。

問題 24. (1) 問題 15 の議論と同じである。

- (2) 問題 23 を応用せよ。
- (3) 省略

問題 25. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ とする。 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = f \circ f^{-1}(\mathbf{x}) + f \circ f^{-1}(\mathbf{y}) = f(f^{-1}(\mathbf{x}) + f^{-1}(\mathbf{y}))$ より

$$f^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f^{-1}(f(f^{-1}(\mathbf{x}) + f^{-1}(\mathbf{y}))) = f^{-1}(\mathbf{x}) + f^{-1}(\mathbf{y})$$

 $c\in\mathbb{R},\,\mathbf{x}\in W$ とする。 $c\mathbf{x}=cf\circ f^{-1}(\mathbf{x})=f(cf^{-1}(\mathbf{x}))$ より $f^{-1}(c\mathbf{x})=cf^{-1}(\mathbf{x})$

平成 20 年度 線形代数学演習 II (担当:岩田 / TA:藤原、富永) 10 月 22 日略解 4