平成 20 年度 線形代数学演習 II
プリント No.4（10 月 29 日配付）略解

問題 1. $(f(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \quad f(\mathbf{e}_n))\mathbf{x} = x_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) = f(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = f(\mathbf{x})$

問題 2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

問題 3. (1) 線形でない (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 4. 線形であり、その表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 5. 与えられた行列を基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 像 $= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ 次元 2, 核 $= \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ 次元 1

(2) 像 $= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ 次元 3, 核 $= \langle \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ 次元 1

問題 6. (1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ により

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = (A + B)\mathbf{x}$$

(2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ により

$$kf(\mathbf{x}) = k(A\mathbf{x}) = (kA)\mathbf{x}$$

問題 7. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ $g(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$ により

$$g(f(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}$$

問題 8. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ -10 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

問題 9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/2 & -1/2 \\ 13/2 & 1/2 \\ -5/2 & 5/2 \end{pmatrix}$ これを基本変形する。
$\begin{pmatrix} -13/2 & -1/2 \\ 13/2 & 1/2 \\ -5/2 & 5/2 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ よって階数は 2 で解の自由度は 0 である。

問題 10. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

問題 11. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -20/3 & 16/3 & -5/3 \\ 20/3 & -13/3 & 5/3 \end{pmatrix}$

問題 12. 問題 13 を参照せよ。

問題 13. プリント No.3 の問題 22 で検討したように、写像 q は同型写像であり、その逆写像がまさに基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ に関する座標を与える。従って f の表現行列は

$$\begin{pmatrix} q^{-1} \circ f(\mathbf{v}_1) & q^{-1} \circ f(\mathbf{v}_2) & \cdots & q^{-1} \circ f(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$

とブロック分けされる。このとき $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix} q^{-1} \circ f(\mathbf{v}_1) & q^{-1} \circ f(\mathbf{v}_2) & \cdots & q^{-1} \circ f(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix} \mathbf{x} = q^{-1} \circ f(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n)$$

であり、その右辺は $q^{-1} \circ f \circ p(\mathbf{x})$ に等しい。よって A が表現行列であるための条件は

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ A\mathbf{x} = q^{-1} \circ f \circ p(\mathbf{x})$$

問題 14. 問題 13 により、f の単射性は $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ のそれと同値。また f の全射性は $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ のそれと同値。よってプリント No.3 の問題 20 に帰着。

問題 15. 与えられた行列を基本変形すると $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。核の基底 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と像の基底 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 次元公式は $4 = 2 + 2$ の形で成り立つ

問題 16. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

問題 17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 18. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

問題 19. ブロック分け $(\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n)$ を持つ行列がそれである。

問題 20. 問題 13 を参照せよ。

問題 21. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 \\ -12 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 22. 形式的に書くと $\mathcal{V} = \mathcal{U}P$, $\mathcal{W} = \mathcal{V}Q$ より $\mathcal{W} = \mathcal{U}PQ$ である。

問題 23. 形式的に書くと $\mathcal{V} = \mathcal{U}P$ より $\mathcal{U} = \mathcal{V}P^{-1}$ である。

問題 24. 基底 $\mathcal{V}$ から基底 $\widetilde{\mathcal{V}}$ への基底変換の行列を P とし、基底 $\mathcal{W}$ から基底 $\widetilde{\mathcal{W}}$ への基底変換の行列を Q とする。このとき、形式的に書くと、次が成り立つ。

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}P, \widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}Q, \mathcal{W}A = f(\mathcal{V}), \widetilde{\mathcal{W}}B = f(\widetilde{\mathcal{V}})$$

以上より $\mathcal{W}QB = \widetilde{\mathcal{W}}B = f(\widetilde{\mathcal{V}}) = f(\mathcal{V}P) = f(\mathcal{V})P = \mathcal{W}AP$ となり $QB = AP$ が導かれる。従って関係 $B = Q^{-1}AP$ が成り立つ。これを問題 12 と比較すると理解が深まる。