線形代数学演習 II 小テスト（11 月 5 日実施） $\boxed{\text{学生番号}}$ $\boxed{\text{氏名}}$ 略解

問題 1. 次の組それぞれについて 1 次独立かどうか判定せよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1+a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2+a\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3+a\\3\\3\end{pmatrix}$$

解. 与えられた列ベクトルの組をブロックとする行列を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&5&-3\\0&-3&0\\3&1&1\end{pmatrix} >> \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3+a\\1&2+a&3\\1+a&2&3\end{pmatrix} >> \begin{pmatrix}1&2&3+a\\0&a&-a\\0&0&a(a+6)\end{pmatrix}$$

(1) 1 次独立。
(2) $a=0$ または $a=-6$ なら 1 次従属。$a\neq 0$ かつ $a\neq -6$ なら 1 次独立。 □

問題 2. 部分空間 $\{{}^t(x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+2x_2=0,\ 2x_1-x_3=0\}$ の基底を求めよ。

解. 例えば ${}^t(2\quad -1\quad 4\quad 0)$, ${}^t(0\quad 0\quad 0\quad 1)$ の組。 □

問題 3. 列ベクトル $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ を次のように与える。それぞれについて番号 $i(1)<\cdots<i(s)$ を選び出して組 $\mathbf{a}_{i(1)},\ \ldots,\ \mathbf{a}_{i(s)}$ が $\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4\rangle$ の基底となるように構成せよ。

$$(1)\quad \begin{array}{cccc}\mathbf{a}_1&\mathbf{a}_2&\mathbf{a}_3&\mathbf{a}_4\\ \begin{pmatrix}1\\3\\7\\9\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1\\2\\4\\7\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\8\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1\\1\\5\\-1\end{pmatrix}\end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{cccc}\mathbf{a}_1&\mathbf{a}_2&\mathbf{a}_3&\mathbf{a}_4\\ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\7\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\\-14\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\18\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\13\end{pmatrix}\end{array}$$

解. 与えられた列ベクトルの組をブロックとする行列を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\3&2&1&1\\7&4&-1&5\\9&7&8&-1\end{pmatrix} >> \begin{pmatrix}1&0&-3&3\\0&1&5&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&-2&2&2\\-1&2&1&-2\\1&-2&-3&1\\7&-14&18&13\end{pmatrix} >> \begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(1) 例えば $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ の組。(2) 例えば $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ の組。 □

問題 4. $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_r\in\mathbb{R}^n$ に対し組 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_r$ が一次従属であることの定義を述べよ。

解. 次の条件を満たす $c_1,c_2,\ldots,c_r\in\mathbb{R}$ が存在すること：
$(c_1,c_2,\ldots,c_r)\neq(0,0,\ldots,0)$ かつ $c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\cdots+c_r\mathbf{a}_r=\mathbf{o}$ □